

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JANAINA SCHOEFFEL BRODZINSKI

ESTUDO DE UM MODELO DISPERSIVO NÃO LINEAR
PARA ONDAS INTERNAS

CURITIBA
2016

JANAINA SCHOEFFEL BRODZINSKI

ESTUDO DE UM MODELO DISPERSIVO NÃO LINEAR
PARA ONDAS INTERNAS

Tese de doutorado apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Matemática da Universidade
Federal do Paraná, como requisito parcial à ob-
tenção do grau de doutor em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Ailin Ruiz de Zárate

CURITIBA
2016

Brodzinski, Janaina Schoeffel

Estudo de um modelo dispersivo não linear para ondas internas /
Janaina Schoeffel Brodzinski. – Curitiba, 2016.

134 f. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor
de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Orientador: Ailin Ruiz de Zárate

Bibliografia: p. 131-134

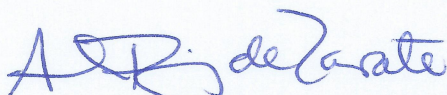
1. Ondas internas. 2. Equações de Boussinesq. I. Zárate, Ailin
Ruiz de. II. Título.

CDD 515.73

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Doutorado de **JANAINA SCHOEFFEL BRODZINSKI**, intitulada: "**ESTUDO DE UM MODELOS DISPERSIVO NÃO LINEAR PARA ONDAS INTERNAS**", após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua.....aprovação....., completando-se assim todos os requisitos previstos nas normas desta Instituição para a obtenção do Grau de **Doutor em MATEMÁTICA**.

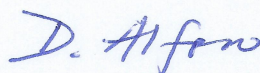
Curitiba, 25 de Fevereiro de 2016.



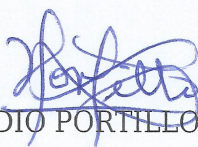
Prof AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS (UFPR)
(Presidente da Banca Examinadora)



Prof CÉSAR JAVIER NICHE MAZZEO (UFRJ)



Prof DANIEL GREGÓRIO ALFARO VIGO (UFRJ)



Prof HIGIDIO PORTILLO OQUENDO (UFPR)

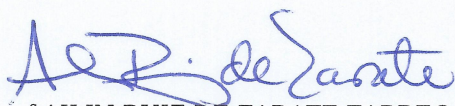


Prof NELSON LUÍS DA COSTA DIAS (UFPR)

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE TESE PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

No dia vinte e cinco de Fevereiro de dois mil e dezesseis às 14:00 horas, na sala Anfiteatro A, Blocos das PCs, Coordenação PPGMA, Centro Politécnico, UFPR, do Setor de CIÊNCIAS EXATAS da Universidade Federal do Paraná, foram instalados os trabalhos de arguição da doutoranda **JANAINA SCHOEFFEL BRODZINSKI** para a Defesa Pública de sua Tese intitulada: "**ESTUDO DE UM MODELOS DISPERSIVO NÃO LINEAR PARA ONDAS INTERNAS**". A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Professores Doutores: AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS (UFPR), CÉSAR JAVIER NICHE MAZZEO (UFRJ), DANIEL GREGÓRIO ALFARO VIGO (UFRJ), HIGIDIO PORTILLO OQUENDO (UFPR), NELSON LUÍS DA COSTA DIAS (UFPR). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra a discente, para que a mesma expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. A aluna respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e a doutoranda deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela aprovação da aluna. A doutoranda foi convidada a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora, outorgando-lhe o Grau de **Doutor em MATEMÁTICA**. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

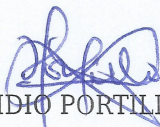
Curitiba, 25 de Fevereiro de 2016.



Prof AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS (UFPR)
(Presidente da Banca Examinadora)



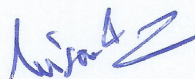
Prof DANIEL GREGÓRIO ALFARO VIGO (UFRJ)



Prof HIGIDIO PORTILLO OQUENDO (UFPR)



Prof NELSON LUÍS DA COSTA DIAS (UFPR)



Prof CÉSAR JAVIER NICHE MAZZEO (UFRJ)

Dedico este trabalho a
todos os meus professores.

Agradecimentos

A minha orientadora e amiga, professora Doutora Ailín Ruiz de Zárate Fábregas, por aceitar o convite para me orientar, por acompanhar de perto a evolução do trabalho e por estar sempre a disposição para me ouvir e aconselhar.

Aos membros da banca e convidados da pré-defesa, professores Doutores Daniel Gregório Alfaro Vigo, Nelson Luís da Costa Dias, Higídio Portillo Oquendo, Jurandir Ceccon, César Javier Niche Mazzeo, Adán José Corcho Fernández e Mahendra Panthee, pelas correções, sugestões e indicações de bibliografia, que foram fundamentais para a conclusão do trabalho.

Ao professor Doutor Fábio Matheus Amorin Natali, pela indicação de bibliografia.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPR, pela oportunidade de cursar o doutorado e por viabilizar a participação em eventos e cursos externos.

À Capes, pelo auxílio financeiro recebido através da bolsa de estudos.

A todos os meus professores, desde o ‘prézinho’ até a última disciplina do doutorado, pelos valiosos ensinamentos recebidos nestes 22 anos de aprendizado.

Ao meu marido, Renato, pelo apoio, incentivo, companhia e carinho recebidos diariamente.

Aos meus pais, João e Luisa, pela educação recebida e pelo apoio e incentivo incondicionais.

A minha família, em especial aos meus irmãos Josnei e Josiel, por fazerem parte da minha vida.

Aos meus amigos, pelas conversas e por tudo que tenho aprendido com vocês.

E a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a elaboração deste trabalho que é o marco da conclusão de uma importante etapa da minha vida.

Resumo

Considera-se um sistema de tipo Boussinesq para ondas intermediárias que contém, quando restrito ao regime unidirecional de propagação de ondas, a equação de ondas longas intermediárias regularizada (ILWR). A última também é estudada. Propriedades de boa colocação para os problemas de Cauchy associados à equação ILWR, a sua linearização, ao sistema de tipo Boussinesq e sua linearização, são demonstradas em espaços de Sobolev apropriados. O principal resultado mostra a existência e unicidade de solução local para o sistema

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}[u]_{xt} + \frac{\beta}{3} u_{xxt}. \end{cases}$$

Palavras-chave: Ondas internas, modelos dispersivos, sistema de tipo Boussinesq, equação de Ondas Longas Intermediárias Regularizada, boa colocação para EDPs.

Abstract

A Boussinesq-type system for intermediate waves is considered which contains, when restricted to the unidirectional wave regime, the regularized intermediate long wave equation (ILWR). The latter is also studied. Properties of well-posedness for the associated Cauchy problems in the proper Sobolev spaces are proved for the ILWR equation, its linearization, the Boussinesq-type system and its linearization. The main result shows the existence and uniqueness of solution for the system

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}[u]_{xt} + \frac{\beta}{3} u_{xxt}. \end{cases}$$

Keywords: Internal waves, Dispersive models, Boussinesq-type system, Regularized Intermediate Long-Wave equation, well-posedness for PDEs.

Conteúdo

1	Introdução	17
2	Teoria preliminar	27
2.1	Transformada de Fourier na reta	27
2.1.1	Espaços de Sobolev de tipo L^2	29
2.2	Série de Fourier (Transf. de Fourier periódica)	31
2.2.1	Espaços de Sobolev periódicos	34
2.3	Convolução	36
2.4	Outros resultados	36
3	A Equação ILW Regularizada	41
3.1	A função cotangente hiperbólica	43
3.2	A equação linearizada	46
3.2.1	Relação de dispersão e velocidade de fase	47
3.2.2	Boa colocação via teoria de semigrupos	50
3.2.3	Boa colocação — abordagem direta	56
3.3	A equação não linear	62
3.3.1	Boa colocação local	63
4	O sistema de tipo Boussinesq para ondas intermediárias	73
4.1	O sistema linearizado	74
4.1.1	Relação de dispersão e velocidade de fase	74
4.1.2	Abordagem via teoria de semigrupos	75
4.1.3	Boa colocação — abordagem direta	82
4.2	O sistema não linear	97
4.3	Lei de conservação	99
4.3.1	Existência e unicidade de solução local	107
5	Conclusões e trabalhos futuros	131
	Bibliografia	134

Capítulo 1

Introdução

A geração de ondas internas a grandes profundidades em mares e oceanos é um fenômeno de interesse muito atual no estudo da dinâmica oceânica [20]. Diferenças de temperatura e salinidade provocam estratificação nas camadas de água, onde ondas de centenas de metros de altura e comprimento ainda maior podem viajar até milhares de quilômetros. Acredita-se que elas sejam responsáveis por transportar e misturar nutrientes do fundo até a superfície, propiciando o desenvolvimento da vida marinha. Segue-se abaixo uma figura exemplificando a situação

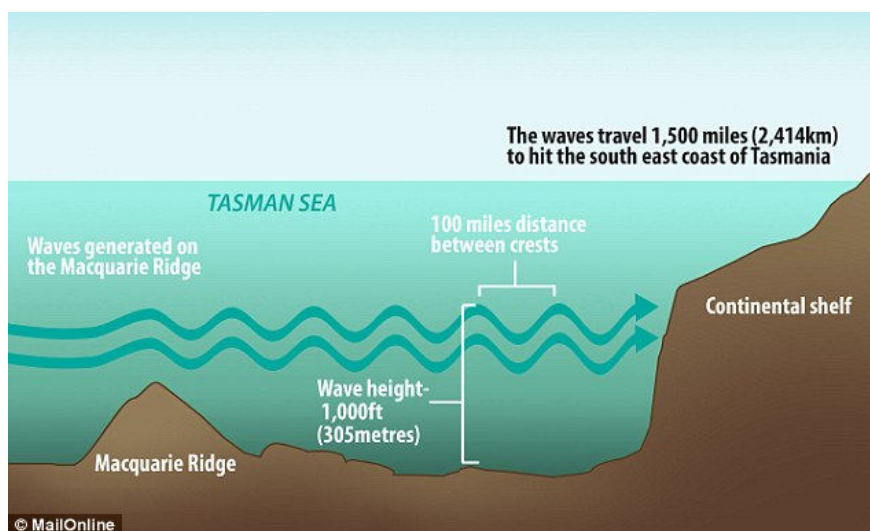


Figura 1.1: Esquema para ondas internas. Fonte: [20].

Por outro lado, essas ondas interagem com as estruturas submersas e as linhas de extração de petróleo e gás, o que pode afetar as operações de recuperação em águas profundas. Tais fatos evidenciam o potencial de impacto econômico e

ambiental da pesquisa no tema. Trata-se de um fenômeno muito complexo que desafia a compreensão de cientistas das mais diversas áreas, especialmente no que se refere à quebra e dissipação de energia dessas grandes ondas. Mesmo focando no processo antes disso acontecer, resulta difícil resolver (analítica ou numericamente) as equações completas de Navier-Stokes. Por isso é comum utilizar modelos simplificados obtidos a partir das equações de Euler em duas dimensões espaciais, que por sua vez reduzem a dinâmica a uma única dimensão espacial, onde descrevem o comportamento da interface entre as camadas [14, 15, 19, 10]. Os modelos devem capturar a dinâmica não linear e ao mesmo tempo permitir a criação de métodos numéricos eficientes que proporcionem resultados informativos.

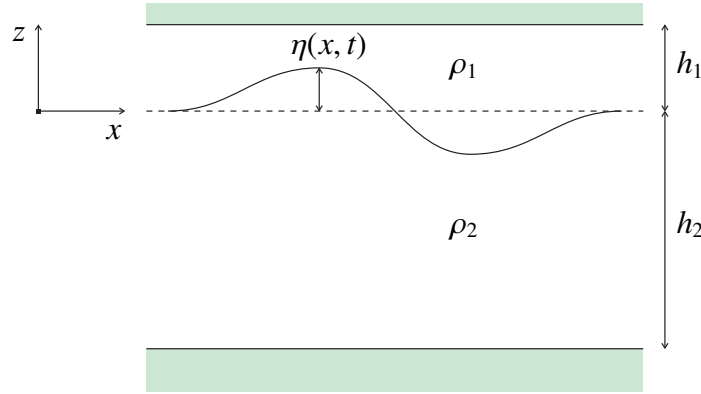


Figura 1.2: Configuração de um sistema com dois fluidos.

A fim de modelar a situação matematicamente, a estratificação, que em geral ocorre no mar de maneira contínua, será suposta aqui discreta, de modo que considerar-se-ão apenas duas camadas de diferentes fluidos com uma interface entre ambas. Consideram-se dois fluidos ideais, invíscidos, imiscíveis, incompressíveis e irrotacionais. A densidade de cada fluido é ρ_1 para a camada de cima e ρ_2 para a camada de baixo. Para que a estratificação seja estável, supõe-se $\rho_2 > \rho_1 > 0$. Similarmente, o par (u_i, w_i) denota as componentes da velocidade, h_i a espessura imperturbada e p_i a pressão, onde $i = 1, 2$, para as camadas de cima e de baixo, respectivamente. A camada de cima tem espessura imperturbada h_1 e a de baixo h_2 . O sistema de coordenadas é posicionado na interface imperturbada entre ambas as camadas, de modo que o fundo é descrito por $z = -h_2 < 0$. O deslocamento da interface é denotado por $\eta(x, t)$. Nestas condições, as equações

de Euler

$$\begin{cases} u_{ix} + w_{iz} = 0 \\ u_{it} + u_i u_{ix} + w_i u_{iz} = -\frac{p_{ix}}{\rho_i} \\ w_{it} + u_i w_{ix} + w_i w_{iz} = -\frac{p_{iz}}{\rho_i} - g, \end{cases}$$

para $i = 1, 2$ correspondendo às camadas superior e inferior, respectivamente, unidas às condições na interface

$$\eta_t + u_i \eta_x = w_i \quad \text{e} \quad p_1 = p_2 \quad \text{em} \quad z = \eta(x, t),$$

à condição de tampa rígida no topo

$$w_1(x, h_1, t) = 0,$$

e a de fundo plano impermeável

$$w_2(x, -h_2, t) = 0,$$

descrevem a dinâmica do sistema e correspondem a uma versão simplificada das equações de Navier-Stokes sob as hipóteses assumidas. Detalhes sobre a dedução das equações podem ser obtidos em [16], cap. 1, e sobre as condições na interface em [44], cap. 13.

Para obter os modelos reduzidos a uma dimensão espacial (eliminando a variável independente z do sistema), assume-se que h_1 é muito menor que o comprimento de onda característico da interface perturbada $L > 0$, donde tem-se um regime de águas rasas na camada de cima. Por outro lado, h_2 é comparável com o comprimento de onda característico L , o que caracteriza um regime de profundidade intermediária na camada inferior. Essas escalas permitem adimensionalizar o sistema de Euler ao mesmo tempo que colocam em evidência o parâmetro pequeno

$$\beta = \left(\frac{h_1}{L} \right)^2,$$

conhecido como parâmetro de dispersão. Esse parâmetro permite realizar as expansões assintóticas que reduzem a dinâmica à interface através do sistema de tipo

Boussinesq

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t = [(1 - \eta)u]_x, \\ u_t + uu_x + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T} [(1 - \eta)u]_{xt} + \\ + \frac{\beta}{3(1-\eta)} ((1 - \eta)^3 (u_{xt} + uu_{xx} - u_x u_x))_x + \beta \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T} [\eta \mathcal{T} [(1 - \eta)u]_x]_{xt} + \\ + \beta \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\eta ((1 - \eta)u)_{xt} + \frac{1}{2} ((1 - \eta)u)_x^2 \right)_x + \frac{\beta}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\mathcal{T} [((1 - \eta)u)_x]^2 \right)_x, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

onde

$$\widehat{\mathcal{T}[f]}(k) = i \coth(kh) \hat{f}(k), \quad (1.2)$$

para $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, no caso não-periódico, ou $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, no caso periódico, $h = h_2/L$. O operador \mathcal{T} é conhecido como a transformada de Hilbert na faixa, nesse caso faixa com espessura h , e é um operador pseudodiferencial. Por conveniência foi mantida a notação η para a perturbação adimensionalizada na interface, que realmente foi escalada em h_1 . A variável u representa a média na vertical da componente horizontal da velocidade da camada superior. Detalhes encontram-se em [36, 38].

Trata-se de um modelo fortemente não linear de ordem de expansão $\mathcal{O}(\beta^{\frac{3}{2}})$, que generaliza o modelo fortemente não linear proposto por Choi e Camassa em [15] nas equações 4.17 – 4.18 da p. 21 e 4.21 da p. 22, porque acrescenta os termos de ordem β da expansão assintótica. Para fins de comparação, escreve-se o modelo de Choi e Camassa na forma que aparece em Ruiz de Zárate [36] (sistema (2.27), p. 25), supondo fundo plano ($M(\xi) = 1$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t = [(1 - \eta)u]_x \\ u_t + uu_x + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T} [(1 - \eta)u]_{xt}, \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Passando ao regime fracamente não linear, onde a amplitude característica da perturbação da interface $\tilde{a} > 0$ é suposta pequena se comparada à altura imperturbada da camada superior h_1 , introduzem-se os escalamentos $\eta = \alpha \eta^*$, $u = \alpha u^*$, onde $\alpha = \tilde{a}/h_1$ é pequeno e da mesma ordem de β . Como resultado, ignorando os asteriscos, a partir do sistema (1.1) obtem-se o seguinte sistema de tipo Bous-

sinesq,

$$\begin{cases} \eta_t = [(1 - \alpha\eta)u]_x, \\ u_t + \alpha u u_x + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \eta_x = \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} \mathcal{T}[u]_{xt} + \frac{\beta}{3} u_{xxt}. \end{cases}$$

de ordem $\beta^{\frac{3}{2}}$. Após a normalização da velocidade adimensional $c_0^2 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)$ pelo escalamento

$$\eta = \eta^\dagger, \quad u = c_0 u^\dagger, \quad t = \frac{t^\dagger}{c_0},$$

e ignorando os \dagger , obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}[u]_{xt} + \frac{\beta}{3} u_{xxt}, \end{cases} \quad (1.4)$$

que será estudado no capítulo 4.

Desde o ponto de vista das técnicas de demonstração de existência e unicidade de solução, é mais fácil tratar uma única equação do que o sistema (1.4). Por isso, no capítulo 3 inicia-se o estudo teórico dos modelos para ondas internas através da equação de ondas longas intermediárias regularizada (ILWR),

$$\eta_t + \eta_x - \frac{3}{2} \alpha \eta \eta_x - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}[\eta_{xt}] = 0. \quad (1.5)$$

A equação de ondas longas intermediárias (ILW)

$$\eta_t + \eta_x - \frac{3}{2} \alpha \eta \eta_x + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}[\eta_{xx}] = 0,$$

é similar à ILWR e foi a primeira a aparecer na literatura. Ela foi introduzida em 1977 por Joseph [26], que fez um estudo analítico da equação. Em 1978, Kubota, Ko e Dobbs fizeram um estudo numérico da equação em [30]. Do ponto de vista da modelagem física, as equações ILWR e ILW aproximam, até a mesma ordem na expansão assintótica, o mesmo fenômeno, mas a ILWR, por ser uma equação regularizada, é mais vantajosa de se utilizar nas simulações numéricas, daí o interesse de um estudo teórico para a mesma.

Depois desses dois artigos pioneiros seguem-se, dentre outros, [39] em 1979, dando um método para resolver o problema de valor inicial associado à equação ILW, e [3] em 1982, introduzindo a versão periódica da equação ILW. Os primeiros resultados sobre existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy

associado à equação ILW aparecem no artigo de Abdelouhab, Bona, Felland e Saut [2], de 1989, onde enunciam a boa colocação da equação ILW em espaços de Sobolev H^s com $s > 3/2$. Os autores optam por detalhar a demonstração para a equação de Benjamin-Ono (BO), de modo que só enunciam os resultados para a equação ILW. A partir deste artigo foi encontrada a tese de doutorado de Borba [11], de 1991, na qual aparece uma demonstração de boa colocação mais detalhada. As principais diferenças entre [2] e [11] são que Borba trata uma classe de equações mais geral (que inclui a equação ILW) e os espaços considerados são os espaços mais gerais chamados espaços de Sobolev com pesos, também com $s > 3/2$. Os resultados de Borba estão publicados em [12]. Além disso, o artigo de Abdelouhab [1], de 1992, faz um estudo na mesma linha da tese de Borba. Por último, cita-se Burq e Planchon, que utilizando outra técnica afirmam ter demonstrado em [13] a boa colocação da equação ILW para $s > 1/4$.

Especificamente para a equação regularizada ILWR, não foram encontrados na literatura trabalhos que explicitem as contas que garantem resultados de boa colocação. Para a equação ILWR linearizada, pode-se citar o livro de Iório & Iório [22], que traz resultados para equações mais gerais, mas para a equação ILWR não linear, nenhum resultado de boa colocação que contemple a equação foi encontrado. No decorrer deste trabalho, são estabelecidos os seguintes resultados:

Boa colocação global da ILWR linearizada:

Teorema 3.2.10. *O problema (3.19), a saber,*

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s(\text{ou } H_{per}^s)) \\ \eta_t + \eta_x - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}(\eta_{xt}) = 0 \text{ em } H^s(\text{ou } H_{per}^s) \\ \eta(0) = \phi \in H^s(\text{ou } H_{per}^s), \end{cases}$$

$s \in \mathbb{R}$, é globalmente bem-posto. Sua única solução, que depende continuamente do dado inicial, é dada por

$$\eta(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{\frac{-ik}{A(k)}t} \hat{\phi}(k) \right] (x).$$

O resultado acima já aparece em [22], com um enunciado mais geral, sendo que optou-se aqui por especificar o resultado e detalhar a demonstração, que foi feita de duas formas: a primeira via teoria de semigrupos de operadores lineares e a segunda com uma abordagem direta baseada em [22]. A opção pelas duas abordagens justifica-se pelo fato de que a meta é adaptar as técnicas de demonstração para o sistema, e quanto maior for o arcabouço disponível, melhor.

Boa colocação local da ILWR:

Teorema 3.3.10. *Sejam $s > \frac{1}{2}$ e $\phi \in H^s$. Então existe $T = T(s, \|\phi\|_s) > 0$ tal que o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} \eta \in C([-T, T], H^s \text{ (ou } H_{per}^s)) \\ \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}(\eta_{xt}) = 0 \text{ em } H^s \text{ (ou } H_{per}^s) \\ \eta(0) = \phi \in H^s \text{ (ou } H_{per}^s), \end{cases}$$

é localmente bem-posto no sentido da definição 3.3.3.

A demonstração de boa colocação para a equação não linear regularizada ILWR foi feita via teorema do ponto fixo de Banach, seguindo as ideias em [11]. Nesse ponto destaca-se o fato de que o resultado obtido aqui ($s > 1/2$ para ILWR) é mais geral, em termos do espaço de funções considerado, que o obtido por Borba ($s > 3/2$ para ILW), devido à regularização no termo dispersivo.

Com relação aos sistemas de tipo Boussinesq que descrevem ondas internas ou ondas de superfície, a maioria dos artigos trabalha com sistemas nos quais ambas as equações possuem termos dispersivos. Seguem-se abaixo alguns exemplos.

Em [4], 2006, Alazman, Albert, Bona, Chen e Wu fazem o estudo analítico e numérico do seguinte sistema de tipo Boussinesq:

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + \epsilon(\eta u)_x = \frac{1}{6}\epsilon\eta_{xxt} \\ u_t + \eta_x + \epsilon u u_x = \frac{1}{6}\epsilon u_{xxt}, \end{cases}$$

que modela ondas de superfície. Observa-se do lado direito de ambas as equações a presença de termos dispersivos.

Recentemente, em [19], Grajales garante a existência local de soluções para o sistema

$$\begin{cases} \eta_t - ((1 - \alpha\eta)u)_x = \frac{\epsilon^2}{6}\eta_{xxt} \\ u_t + \alpha u u_x + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\eta_x = \frac{\rho_2}{\rho_1}\epsilon\mathcal{H}(u_{xt}) + \frac{\epsilon^2}{6}u_{xxt}, \end{cases}$$

onde \mathcal{H} é a transformada de Hilbert. O sistema lembra o que aparece em [4], mantendo dispersão nas duas equações.

Também foi analisado o artigo de Xu, [47], de 2012, no qual considera-se o

sistema

$$\begin{cases} \eta_t + \rho[(1 - \alpha\eta)u]_x + [\theta b k \coth(hk)\hat{\eta}_t]^\sim + [(\theta - 1)\rho b k \coth(hk)\hat{u}_x]^\sim = 0 \\ u_t - \alpha\rho u u_x + (1 - \rho)\eta_x = 0. \end{cases}$$

cuja principal diferença para o sistema (1.4), tratado neste trabalho, é o termo dispersivo, que aparece na primeira equação ao invés de aparecer na segunda, de tal forma que a não linearidade na equação de primeira ordem do sistema envolve apenas uma das funções incógnitas. Segundo [40], p. 177, a demonstração apresentada usa a dispersão do sistema de maneira essencial, compensando a perda de derivadas.

Cita-se ainda [8] e [9], nos quais Bona, Chen e Saut apresentam a teoria linear e não linear, respectivamente, para o sistema de Boussinesq e algumas variações, entretanto os sistemas tratados não contemplam o sistema (1.4).

O principal desafio do sistema (1.4), se comparado com os sistemas escritos acima, está na equação de primeira ordem não linear, que corresponde exatamente à lei de conservação de massa na camada superior de fluido proveniente das equações de Euler. O sistema original de Boussinesq para ondas de superfície (ver [44], p. 466, para dedução) apresenta a mesma lei de conservação. No artigo [41] de Schonbek, o sistema de Boussinesq aparece normalizado da seguinte forma

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + (u\eta)_x = 0 \\ u_t + \eta_x + u u_x - u_{xxt} = 0. \end{cases}$$

Schonbek enuncia um teorema de existência e unicidade local para o problema com regularização parabólica, e em seguida enuncia e prova a existência global para o sistema de Boussinesq. A partir desse trabalho, Amick prova em [7] a boa colocação global para dados suaves.

Desse modo, não foram encontrados na literatura resultados sobre a boa colocação do sistema não linear (1.4). Para o sistema linearizado, utilizando a teoria de semigrupos de operadores lineares, demonstrou-se o resultado abaixo.

Boa colocação global do sistema de tipo Boussinesq linearizado:

Teorema 4.1.5. *O problema (4.10), a saber,*

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C(\mathbb{R}, H_{per}^s \times H_{per}^{s+1}) \\ \eta_t - u_x = 0, \\ u_t - \eta_x = b \mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \in H_{per}^s \times H_{per}^{s+1}, \end{cases}$$

$s \in \mathbb{R}$, tem uma única solução, a saber, $(\eta(t), u(t)) = S(t)(\phi, \psi)$, a qual depende continuamente do dado inicial. Resumindo, o problema é globalmente bem-posto. Além disso,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\eta_t(t), u_t(t)) \in H_{per}^s \times H_{per}^{s+1}.$$

Também foi apresentada outra demonstração para o mesmo resultado, seguindo de perto as ideias que aparecem em [6], artigo de Alfaro, Oliveira, Ruiz de Zárate e Nachbin, que trata o sistema (1.4) com $a = 0$, o que permitiu exibir a expressão da solução no domínio da frequência (ver teorema 4.1.13).

Para o sistema não linear (1.4), obteve-se o seguinte resultado sobre boa colocação, cuja demonstração segue a técnica de regularização parabólica, que aparece, por exemplo, em [24].

Boa colocação local do sistema de tipo Boussinesq:

Teorema 4.3.14. *Sejam $s > \frac{3}{2}$ e $(\phi, \psi) \in H^{s+1} \times H^{s+1}$ funções a valores reais. Então existe $T_s = T(s, \|\phi\|_{s+1}, \|\psi\|_{s+1}) > 0$ tal que o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C([0, T_s], H^s \times H^{s+1}) \\ \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0, \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = b\mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \in H^{s+1} \times H^{s+1}, \end{cases}$$

possui uma única solução local. Além disso,

$$\forall t \in [0, T_s], \quad (\eta_t(t), u_t(t)) \in H^{s-2} \times H^{s-1}.$$

O resultado acima é a principal contribuição desta tese. Além disso, inspirada no resultado similar de [41] para o sistema de Boussinesq, a seguinte lei de conservação para o sistema de tipo Boussinesq foi obtida

Teorema 4.3.4. *Sejam $s > \frac{3}{2}$ e (η, u) solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C([0, T_s], H^s \times H^{s+1}) \\ \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0, \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = b\mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \in H^s \times H^{s+1}, \end{cases}$$

Então,

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(0),$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2}{2} dx + \frac{b}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x \mathcal{T}[v] dx + \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) dx, \\ g(\omega) &= \omega \log \omega - \omega + 1, \\ \omega &= 1 - \alpha \eta, \quad v = \alpha u.\end{aligned}$$

O capítulo 2 é dedicado a estabelecer a notação e resumir definições e resultados da teoria de espaços de Sobolev utilizados neste trabalho, de modo que este capítulo deve ser consultado caso surjam dúvidas nesse sentido.

Os capítulos 3 e 4, como já mencionado acima, dedicam-se ao estudo da equação de ondas longas intermediárias regularizada (1.5) e do sistema de tipo Bousinesq (1.4), respectivamente, apresentando resultados de boa colocação para os problemas de Cauchy associados. No decorrer desses capítulos, os problemas são abordados tanto na versão periódica quanto na versão não periódica. Alguns resultados são enunciados para ambos os casos, enquanto noutros optou-se por uma das versões, a fim de fixar a notação na demonstração, mas todos os resultados são válidos para as duas situações.

Finalmente, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões e mencionadas possibilidades de continuação desta pesquisa, tanto na linha analítica abordada aqui quanto na implementação numérica de modelos discretos associados.

Capítulo 2

Teoria preliminar

Neste capítulo são fixadas as notações e definições, bem como são estabelecidos os enunciados (sem demonstração) de alguns resultados utilizados nos capítulos seguintes. A teoria apresentada segue de perto [22] e [21]. As situações não periódica e periódica, são apresentadas separadamente, nesta ordem.

Para começar, segue-se a definição de boa colocação que orienta os resultados dos capítulos 3 e 4:

Definição 2.0.1. Um problema de Cauchy é dito bem-posto (no sentido de Hadamard) quando se verifica a existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais para sua solução. Se uma destas três condições falha, diz-se que o problema é mal-posto.

Quando necessário esta definição será detalhada, especificando seu significado no contexto local ou não local, linear ou não linear.

2.1 Transformada de Fourier na reta

Definição 2.1.1. O conjunto das funções absolutamente integráveis é definido por

$$L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^1} < \infty\},$$

onde a *norma* $\|\cdot\|_{L^1}$ é dada por

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

O conjunto das funções quadrado-integráveis é definido por

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^2} < \infty\},$$

onde a norma $\|\cdot\|_2$ é dada por

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

O produto interno correspondente, denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$, é definido, para $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, por

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Observação 2.1.2. Os espaços $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$ são completos nas suas respectivas normas $\|\cdot\|_{L^1}$ e $\|\cdot\|_{L^2}$ (ver [25], p. 240). \diamond

Definição 2.1.3. Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. A transformada de Fourier de f é a função $\mathcal{F}[f]$ dada por

$$\mathcal{F}[f](k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \forall k \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

O interesse aqui é trabalhar com funções em $L^2(\mathbb{R})$, mas a fórmula (2.1) da transformada de Fourier não se aplica para qualquer função deste conjunto. A alternativa é definir a transformada de Fourier no espaço de Schwartz e depois estendê-la para $L^2(\mathbb{R})$.

Definição 2.1.4 (Def. 7.5, p. 325 de [22]). O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ suaves e rapidamente decrescentes, isto é, é o conjunto

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}); \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| < \infty, \forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \right\}.$$

Observação 2.1.5. O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é um subconjunto de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ e é denso em $L^2(\mathbb{R})$ com relação à norma $\|\cdot\|_2$. \diamond

No espaço de Schwartz é possível definir a transformada de Fourier inversa.

Definição 2.1.6. Seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. A transformada de Fourier inversa de ψ é a função $\mathcal{F}^{-1}[\psi]$ dada por

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \check{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(k) e^{ikx} dk, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A transformada de Fourier restrita ao espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pode ser estendida de forma única ao espaço $L^2(\mathbb{R})$, pelo teorema da extensão linear de transformação contínua

(p. 100 de [28]). Assim, mantendo a mesma notação para a função estendida, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 2.1.7 (Teo. 7.45, p. 342 de [22]). *A transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ é um operador unitário. Além disso,*

$$\left(\hat{f}\right)^{\sim} = f = \left(\check{f}\right)^{\wedge}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Agora, como os espaços de Sobolev de tipo L^2 são subconjuntos de distribuições temperadas, é necessário definir a transformada de Fourier para esses objetos.

Definição 2.1.8 (Def. 7.6, p. 326 de [22]). Uma distribuição temperada é um funcional linear contínuo sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. O conjunto de todas as distribuições temperadas é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Definição 2.1.9 (Def. 7.46, p. 343 de [22]). Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. A transformada de Fourier de f é a distribuição temperada $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$ dada por

$$\langle \hat{f}, \phi \rangle = \langle f, \hat{\phi} \rangle = f(\hat{\phi}), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Teorema 2.1.10 (Teo. 7.48, p. 343 de [22]). *A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ é um isomorfismo, isto é, é injetiva, sobrejetiva e contínua com inversa contínua. Além disso,*

$$\left(\hat{f}\right)^{\sim} = f = \left(\check{f}\right)^{\wedge}, \quad e$$

$$\left(f^{(n)}\right)^{\wedge}(k) = (ik)^n \hat{f}(k), \quad \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

2.1.1 Espaços de Sobolev de tipo L^2

Definição 2.1.11 (Def. 7.74, p. 356 de [22]). Seja $s \in \mathbb{R}$. O espaço de Sobolev (de tipo L^2) $H^s = H^s(\mathbb{R})$ é a coleção de todas as distribuições $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tais que $\left((1 + k^2)^{s/2} \hat{f}\right) \in L^2(\mathbb{R})$, isto é,

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); \hat{f} \text{ é mensurável e } \|f\|_s < \infty \right\},$$

onde

$$\|f\|_s = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^s \left| \hat{f}(k) \right|^2 dk \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Denotar-se-á por $L_s^2 = L_s^2(\mathbb{R})$ o espaço de todas as funções mensuráveis $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ com $\|f\|_{L_s^2} < \infty$, onde

$$\|f\|_{L_s^2} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |f(k)|^2 dk \right]^{1/2}.$$

Observação 2.1.12. Da definição anterior tem-se que $f \in H^s$ se, e somente se, $\hat{f} \in L_s^2$; e neste caso $\|f\|_s = \|\hat{f}\|_{L_s^2}$, ou seja, a transformada de Fourier

$$\mathcal{F} : H^s \longrightarrow L_s^2,$$

dada pela definição 2.1.9, é uma isometria. \diamond

Teorema 2.1.13 (Teo. 7.75, p. 357 de [22]). *Seja $s \in \mathbb{R}$. Então H^s é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno*

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)} dk.$$

Além disso,

a. Para $s, r \in \mathbb{R}$, $s \geq r$, H^s está continuamente e densamente imerso em H^r e

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s, \quad \forall f \in H^s. \quad (2.2)$$

Em particular, se $s \geq 0$, $H^s \hookrightarrow L^2 = H^0$.

b. Para $s > \frac{1}{2}$, H^s está continuamente e densamente imerso em $C_\infty(\mathbb{R})$, onde $C_\infty(\mathbb{R})$ denota a coleção de todas as funções contínuas que tendem a zero no infinito.

Proposição 2.1.14. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Se $f \in H^s$ então*

$$\|\partial_x f\|_{s-1} \leq \|f\|_s.$$

Teorema 2.1.15 (Teo. 7.77, p. 359 de [22]). *Se $s > \frac{1}{2}$, H^s é uma álgebra de Banach. Em particular, existe uma constante $C_s \geq 0$ dependendo somente de s tal que*

$$\|fg\|_s \leq C_s \|f\|_s \|g\|_s, \quad \forall f, g \in H^s.$$

Observação 2.1.16. Para detalhes sobre a definição de uma álgebra de Banach sugere-se consultar [28], Seção 7.6.

Lema 2.1.17 (Caso particular do Lema A.1, p. 122 de [27]). *Sejam $s > \frac{1}{2}$ e $f \in H^s$. Então, existe uma constante $c \geq 0$ tal que*

$$\|\hat{f}\|_{L^1} \leq c\|f\|_s.$$

Lema 2.1.18 (Caso particular do Lema A.5, p. 124 de [27] e também do Teo. 8.3, p. 372 de [22]). *Sejam $s > \frac{3}{2}$ e $f, g \in H^s$ funções a valores reais. Então, existe uma constante $c \geq 0$ tal que*

$$|\langle fg_x, g \rangle_s| \leq c\|f\|_s\|g\|_s^2.$$

Definição 2.1.19. Sejam $s, r \in \mathbb{R}$.

O espaço $H^s \times H^r$ é o produto cartesiano dos espaços H^s e H^r , munido da norma

$$\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{s,r} = \sqrt{\|f\|_s^2 + \|g\|_r^2}.$$

O espaço $L_s^2 \times L_r^2$ é o produto cartesiano dos espaços L_s^2 e L_r^2 , munido da norma

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{L_s^2, L_r^2} = \sqrt{\|u\|_{L_s^2}^2 + \|v\|_{L_r^2}^2}.$$

Observação 2.1.20. Os espaços $H^s \times H^r$ e $L_s^2 \times L_r^2$ são espaços de Hilbert com os produtos internos

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{s,r} = \langle f_1, f_2 \rangle_s + \langle g_1, g_2 \rangle_r, \quad \text{e}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{L_s^2, L_r^2} = \langle u_1, u_2 \rangle_{L_s^2} + \langle v_1, v_2 \rangle_{L_r^2},$$

respectivamente. ◇

2.2 Série de Fourier (Transf. de Fourier periódica)

O uso de computadores limita os cálculos a dados discretos. Por isso é interessante considerar o caso de funções periódicas, uma vez que esse tipo de função possui frequências $k \in \mathbb{Z}$, dando um primeiro passo na discretização.

Definição 2.2.1. O conjunto das funções teste é definido por

$$\mathcal{P} = C_{\text{per}}^\infty([-\pi, \pi]) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é infinitamente diferenciável e } 2\pi\text{-periódica}\}.$$

O conjunto das sequências rapidamente decrescentes é definido por

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}) = \{v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; \|v\|_{\infty, n} < \infty, \forall n = 0, 1, 2, \dots\},$$

onde

$$\|v\|_{\infty, n} = \begin{cases} \sup_{k \in \mathbb{Z}} |v(k)|, & \text{se } n = 0, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} (|v(k)| |k|^n), & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Definição 2.2.2. A transformada de Fourier de uma função teste $f \in \mathcal{P}$ é dada por

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 2.2.3 (Teo. 1.2, p. 98 de [21]). *A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ é uma bijeção linear contínua com inversa contínua. A função inversa $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{P}$ é dada pela série de Fourier, isto é,*

$$\mathcal{F}^{-1}[v](x) = \check{v}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k) e^{ikx}.$$

Definição 2.2.4. Uma distribuição periódica é um funcional linear $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que existe uma sequência $(\Psi_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{P}$ satisfazendo

$$T(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{P}.$$

O conjunto de todas as distribuições periódicas será denotado por \mathcal{P}' . Segue-se da definição que toda distribuição periódica é um funcional linear contínuo.

O conjunto das sequências de crescimento lento é definido por

$$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}) = \{v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; \exists C, N > 0 \text{ com } |v(k)| \leq C|k|^N, \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}\}.$$

Observação 2.2.5. A notação

$$T(\phi) = \langle T, \phi \rangle, \quad T \in \mathcal{P}', \quad \phi \in \mathcal{P},$$

será usada no que se segue. ◇

Considerando as funções $\Phi_k(x) = e^{ikx}$, com $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

Definição 2.2.6 (p. 122 de [21]). A transformada de Fourier de uma distribuição periódica $f \in \mathcal{P}'$ é dada por

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \langle f, \Phi_{-k} \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 2.2.7 (p. 126 de [21]). A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{P}' \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ é uma bijeção linear. Sua inversa $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{P}'$ é dada pela série de Fourier, isto é,

$$\mathcal{F}^{-1}[v](x) = \check{v}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k) \Phi_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k) e^{ikx},$$

onde a série converge no sentido de \mathcal{P}' .

Definição 2.2.8. O espaço das sequências quadrado-somáveis é definido por

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; \|v\|_{\ell^2} < \infty\},$$

com norma dada por

$$\|v\|_{\ell^2} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |v(k)|^2 \right)^{1/2},$$

e produto interno dado por

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{\ell^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_1(k) \overline{v_2(k)}.$$

O espaço $\ell^2(\mathbb{Z})$ é um espaço de Hilbert.

Definição 2.2.9 (p. 137 de [21]). O espaço $L_{\text{per}}^2 = L^2([-\pi, \pi])$ é a coleção das distribuições periódicas $f \in \mathcal{P}'$ que são limites (no sentido de \mathcal{P}') de sequências $(\phi_n) \subset \mathcal{P}$ de Cauchy em relação à norma

$$\|\cdot\|_{L_{\text{per}}^2} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} |\cdot(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Teorema 2.2.10 (Teo. 5.2, p. 138 de [21]). Sejam $f, g \in L_{\text{per}}^2$ e $(\phi_n), (\psi_n) \subset \mathcal{P}$ tais que $\phi_n \xrightarrow{L^2} f, \psi_n \xrightarrow{L^2} g$. Então o espaço vetorial L_{per}^2 , munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{L_{\text{per}}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x) \overline{\psi_n(x)} dx,$$

é um espaço de Hilbert.

Teorema 2.2.11 (Teo. 5.3, p.138 de [21]). *A transformada de Fourier restrita a L_{per}^2 é uma bijeção entre L_{per}^2 e $\ell^2(\mathbb{Z})$. Além disso, vale a identidade de Parseval*

$$\|f\|_{L_{per}^2}^2 = 2\pi \|\hat{f}\|_{\ell^2}^2, \quad \forall f \in L_{per}^2,$$

ou equivalentemente,

$$\langle f, g \rangle_{L_{per}^2} = 2\pi \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\ell^2} \quad \forall f, g \in L_{per}^2.$$

2.2.1 Espaços de Sobolev periódicos

Definição 2.2.12 (Def. 3.192, p. 201, de [22]). Seja $s \in \mathbb{R}$. O espaço de Sobolev $H_{per}^s = H_{per}^s[-\pi, \pi]$ é o conjunto de todas as funções $f \in \mathcal{P}'$ tais que

$$\|f\|_s^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |\hat{f}(k)|^2 < \infty.$$

Em outras palavras, uma distribuição periódica f pertence a H_{per}^s se e somente se $\left((1+k^2)^{s/2} \hat{f}(k)\right)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z})$.

Definição 2.2.13. Define-se $\ell_s^2(\mathbb{Z})$ como o espaço de todas as sequências $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ com

$$\|\alpha\|_{\ell_s^2} = \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |\alpha_k|^2 \right]^{1/2} < \infty.$$

Observação 2.2.14. Então $f \in H_{per}^s$ se, e somente se, $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_s^2$; e neste caso $\|f\|_s = \|\hat{f}\|_{\ell_s^2}$, ou seja, a transformada de Fourier

$$\mathcal{F} : H_{per}^s \longrightarrow \ell_s^2(\mathbb{Z}),$$

dada pela definição 2.2.6, é uma isometria. \diamond

É fácil ver que $\forall s \in \mathbb{R}$, H_{per}^s é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno

$$\langle f, g \rangle_s = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)}.$$

Proposição 2.2.15 (Prop. 3.193, p. 201 de [22]). *Sejam $s, r \in \mathbb{R}$, $s \geq r$. Então H_{per}^s está continuamente e densamente imerso em H_{per}^r e*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s, \quad \forall f \in H_{per}^s.$$

Em particular, se $s \geq 0$, $H_{\text{per}}^s \hookrightarrow L_{\text{per}}^2$.

Proposição 2.2.16. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Se $f \in H_{\text{per}}^s$ então*

$$\|\partial_x f\|_{s-1} \leq \|f\|_s.$$

Teorema 2.2.17 (Teo. 3.200, p. 207 de [22]). *Se $s > \frac{1}{2}$, H_{per}^s é uma álgebra de Banach. Em particular, existe uma constante $C_s \geq 0$ dependendo somente de s tal que*

$$\|fg\|_s \leq C_s \|f\|_s \|g\|_s, \quad \forall f, g \in H_{\text{per}}^s.$$

Lema 2.2.18 (Caso particular do Teo. 6.9, p.298 de [22]). *Sejam $s > \frac{3}{2}$ e $f, g \in \mathcal{P}$ funções a valores reais. Então, existe uma constante $c \geq 0$ tal que*

$$|\langle fg_x, g \rangle_s| \leq c \|f\|_s \|g\|_s^2.$$

Definição 2.2.19. Sejam $s, r \in \mathbb{R}$.

O espaço $H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^r$ é o produto cartesiano dos espaços H_{per}^s e H_{per}^r , munido da norma

$$\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{s,r} = \sqrt{\|f\|_s^2 + \|g\|_r^2}.$$

O espaço $\ell_s^2(\mathbb{Z}) \times \ell_r^2(\mathbb{Z})$ é o produto cartesiano, dos espaços $\ell_s^2(\mathbb{Z})$ e $\ell_r^2(\mathbb{Z})$, munido da norma

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{\ell_s^2, \ell_r^2} = \sqrt{\|u\|_{\ell_s^2}^2 + \|v\|_{\ell_r^2}^2}.$$

Observação 2.2.20. Os espaços $H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^r$ e $\ell_s^2(\mathbb{Z}) \times \ell_r^2(\mathbb{Z})$ são espaços de Hilbert com os produtos internos

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{s,r} = \langle f_1, f_2 \rangle_s + \langle g_1, g_2 \rangle_r, \quad \text{e}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\ell_s^2, \ell_r^2} = \langle u_1, u_2 \rangle_{\ell_s^2} + \langle v_1, v_2 \rangle_{\ell_r^2},$$

respectivamente. ◇

Observação 2.2.21. A transformada de Fourier

$$\mathcal{F} : H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^r \longrightarrow \ell_s^2(\mathbb{Z}) \times \ell_r^2(\mathbb{Z}),$$

que é definida termo a termo, é uma isometria. ◇

2.3 Convolução

Definição 2.3.1. A convolução de duas funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

desde que a integral do lado direito exista.

Teorema 2.3.2 (Teo. 1.4, p. 278 de [21]). *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Então*

$$\widehat{(f * g)}(k) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \hat{g}(k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Passando rapidamente ao caso periódico, tem-se

Definição 2.3.3 (Def. 3.182, p. 195 de [22]). *Sejam $f \in \mathcal{P}'$ e $\phi \in \mathcal{P}$. A convolução $f * \phi$ de f e ϕ é a função*

$$(f * \phi)(x) = \frac{1}{2\pi} \langle f, T_x \tilde{\phi} \rangle, \quad x \in \mathbb{R}.$$

onde $T_x \tilde{\phi}(y) = \phi(x-y)$. Em particular, se $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi])$ pode-se escrever

$$(f * \phi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\phi(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.3.4 (Prop. 3.184, p. 196 de [22]). *Sejam $f \in \mathcal{P}'$ e $\phi \in \mathcal{P}$. Então*

$$\widehat{(f * \phi)}(k) = \hat{f}(k) \hat{\phi}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Definição 2.3.5 (Def. 3.198, p. 206 de [22]). A convolução de duas sequências de números complexos $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\beta = (\beta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é a sequência $\alpha * \beta$ definida por

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \beta_{k-j}, \quad (2.3)$$

desde que a série do lado direito convirja.

2.4 Outros resultados

Teorema 2.4.1 (Desigualdade de Young, p. 395 de [22]). *Sejam $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, e $g \in L^1(\mathbb{R})$. Então $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ com*

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}.$$

Teorema 2.4.2 (Desigualdade de Young em H^s). *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $f \in H^s$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$. Então $f * g \in H^s$ com*

$$\|f * g\|_s \leq \|f\|_s \|g\|_{L^1}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \|f * g\|_s &= \left\| (1 + k^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f * g} \right\|_{L^2} = \left\| (1 + k^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \widehat{g} \right\|_{L^2} \\ &= \left\| \widehat{h * g} \right\|_{L^2}, \quad \text{onde } \widehat{h}(k) = (1 + k^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(k), \\ &= \|h * g\|_{L^2} \stackrel{\text{Young}}{\leq} \|h\|_{L^2} \|g\|_{L^1} = \|f\|_s \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.4.3 (Desigualdade de Gronwall, forma integral). *Seja $g \in C([a, b], \mathbb{R})$ tal que*

$$0 \leq g(t) \leq \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \int_a^t g(s) ds.$$

Então

$$g(t) \leq \tilde{\alpha} e^{\tilde{\beta} t}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Teorema 2.4.4 (Desigualdade de Gronwall, forma diferencial). *Seja $g \in C([a, b], \mathbb{R})$ diferenciável em (a, b) tal que*

$$\frac{d}{dt} g(t) \leq \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} g(t),$$

$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ constantes. Então

$$g(t) \leq g(0) e^{\tilde{\beta} t} + \tilde{\alpha} \int_0^t e^{\tilde{\beta}(t-s)} ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Teorema 2.4.5 (Teorema do Ponto Fixo de Banach, p. 394 de [22]). *Seja (Λ, d) um espaço métrico completo e suponha que $A : \Lambda \rightarrow \Lambda$ é uma contração estrita (ou seja, $d(A(x), A(y)) < d(x, y)$, $\forall x, y \in \Lambda$). Então A tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $x^* \in \Lambda$ tal que $A(x^*) = x^*$. Além disso, definindo a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por $x_n = A(x_{n-1})$, $n \geq 1$, com $x_0 \in \Lambda$ arbitrário, tem-se que $x_n \rightarrow x^*$.*

Para finalizar o capítulo, segue-se na próxima página uma tabela reunindo as principais propriedades da transformada de Fourier para os casos periódico e não periódico:

	Série de Fourier	Transformada de Fourier
Definição	$\hat{\cdot}: L^2_{\text{per}}[-\pi, \pi] \longrightarrow l^2_{\mathbb{Z}}$ $f \longmapsto \left(\hat{f}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}},$ <p>onde $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$.</p>	$\hat{\cdot}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $f \longmapsto \hat{f},$ <p>onde $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$.</p>
Linearidade	$\widehat{f+g}(k) = \hat{f}(k) + \hat{g}(k),$ $\widehat{\alpha f}(k) = \alpha \hat{f}(k), \quad \alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}.$	$\widehat{f+g}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi),$ $\widehat{\alpha f}(\xi) = \alpha \hat{f}(\xi), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \xi \in \mathbb{R}.$
Translação	$w(x) = f(x - x_0) \Rightarrow$ $\hat{w}(k) = e^{-ikx_0} \hat{f}(k), \quad x_0 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$	$w(x) = f(x - x_0) \Rightarrow$ $\hat{w}(\xi) = e^{-i\xi x_0} \hat{f}(\xi), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}.$
Modulação	$v(x) = e^{imx} f(x) \Rightarrow$ $\hat{v}(k) = \hat{f}(k - m), \quad m, k \in \mathbb{Z}.$	$v(x) = e^{i\eta x} f(x) \Rightarrow$ $\hat{v}(\xi) = \hat{f}(\xi - \eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}.$
Dilatação	$u(x) = f(-x) \Rightarrow$ $\hat{u}(k) = \hat{f}(-k), \quad k \in \mathbb{Z}.$	$u(x) = f(cx) \Rightarrow$ $\hat{u}(\xi) = \frac{1}{ c } \hat{f}\left(\frac{\xi}{c}\right), \quad \xi, c \in \mathbb{R}, c \neq 0.$
Conjugação	$\hat{\hat{f}}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$	$\hat{\hat{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$
Derivação	$\hat{f}'(k) = ik \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$	$\xi \in \mathbb{R}: \hat{f}'(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi), \quad \text{e}$ $g(x) = xf(x) \Rightarrow \hat{g}(\xi) = i\hat{f}'(\xi).$
Identidade de Parseval	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left \hat{f}(k) \right ^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) ^2 dx,$ $f \in L^2_{\text{per}}[-\pi, \pi].$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \left \hat{f}(\xi) \right ^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) ^2 dx,$ $f \in L^2(\mathbb{R}).$
Inversa	$\vee: l^2_{\mathbb{Z}} \longrightarrow L^2_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ $\left(\hat{f}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \longmapsto f,$ <p>onde $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$.</p>	$\vee: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\hat{f} \longmapsto f,$ <p>onde $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$.</p>

Tabela 2.1: Propriedades da transformada de Fourier, periódica e não periódica.

Capítulo 3

A Equação ILW Regularizada

Este capítulo abordará uma versão regularizada da equação de ondas longas intermediárias (ILW)

$$\eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}[\eta_{xx}] = 0, \quad (3.1)$$

que foi introduzida por Joseph [26], em 1977, para modelar ondas em um sistema de dois fluidos e é amplamente tratada na literatura [2, 3, 5, 11, 12, 15, 29, 30, 39]. Especificamente, no artigo de Choi e Camassa, [15], apêndice A, eq. (A20), a equação ILW aparece como uma aproximação de baixa ordem $\mathcal{O}(\sqrt{\beta})$, para $\alpha = \mathcal{O}(\sqrt{\beta})$, no regime unidirecional de propagação para o sistema fracamente não linear derivado de (1.3).

A versão regularizada, denominada equação de ondas longas intermediárias regularizadas (ILWR), dada por

$$\eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}[\eta_{xt}] = 0, \quad (3.2)$$

que é a versão escolhida para ser tratada neste capítulo, é equivalente até a ordem de aproximação $\mathcal{O}(\sqrt{\beta})$ à equação ILW (3.1), pois a partir de qualquer uma delas tem-se $\eta_t = -\eta_x + \mathcal{O}(\sqrt{\beta})$, e portanto

$$\eta_{tx} = -\eta_{xx} + \mathcal{O}(\beta),$$

de modo que η_{tx} e $-\eta_{xx}$ podem ser trocados no termo dispersivo sem mudar a ordem de aproximação da equação.

A preferência pela equação regularizada (3.2) no lugar de (3.1) se deve ao melhor comportamento da velocidade de fase da primeira, conforme é detalhado

na seção 3.2.1. Enfatiza-se ainda que neste capítulo α é considerado da ordem de $\sqrt{\beta}$, ou seja, $\alpha = O(\sqrt{\beta})$.

O operador \mathcal{T} , tanto no caso periódico ($x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$) quanto no caso não periódico ($x \in \mathbb{R} \Rightarrow k \in \mathbb{R}$), satisfaz a seguinte condição no domínio da frequência:

$$\widehat{\mathcal{T}[f]}(k) = i \coth(kh) \hat{f}(k), \quad k \neq 0. \quad (3.3)$$

A dedução física da equação (ver [3]) leva naturalmente à representação do operador \mathcal{T} no domínio da frequência, cuja fórmula é dada por (3.3). Essa é a expressão que será utilizada na hora de fazer as estimativas ou avaliações do operador. A título de curiosidade, menciona-se a expressão de \mathcal{T} no domínio físico, que consiste na convolução com os seguintes núcleos:

$$T(x; h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2h} \coth\left(\frac{\pi}{2h}x\right), \quad \text{no caso não periódico e}$$

$$T_{\text{per}}(x; h) = -\frac{2K}{\pi} \left[Z\left(\frac{Kx}{\pi}\right) + dn\left(\frac{Kx}{\pi}\right) cs\left(\frac{Kx}{\pi}\right) \right], \quad \text{no caso periódico,}$$

onde K denota a integral elíptica completa de primeiro tipo, Z é a função zeta de Jacobi e dn , cs são funções elípticas Jacobianas, tais como aparecem em [3, 17]. Mais precisamente, conforme [45, 46],

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

onde

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

é a integral elíptica de primeiro tipo, ou seja,

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \\ &= \frac{\pi}{2} \mathcal{H}g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right), \end{aligned}$$

sendo $\mathcal{H}g$ a função hipergeométrica e o duplo fatorial é dado por

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 & \text{se } n > 0 \text{ ímpar,} \\ n \cdot (n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2 & \text{se } n > 0 \text{ par,} \\ 1 & n = -1, 0. \end{cases}$$

A escolha do módulo k segue o critério

$$\frac{K'(k)}{K(k)} = \frac{h}{\pi}, \quad \text{onde } K'(k) = K(\sqrt{1-k^2}).$$

Observação 3.0.6. A diferença $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ no fator que acompanha o núcleo no caso não periódico, comparado com [15] e [36], se deve ao fator presente na definição da transformada de Fourier adotada aqui. \diamond

Portanto, a ação do operador \mathcal{T} pode ser escrita como

$$\mathcal{T}[f](x) = f * T(x) = \frac{1}{2h\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \coth\left(\frac{\pi}{2h}(x-y)\right) dy,$$

no caso não periódico, e

$$\mathcal{T}[f](x) = f * T_{\text{per}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) T_{\text{per}}(x-y) dy,$$

no caso periódico, onde a integral \oint representa o Valor Principal de Cauchy.

3.1 A função cotangente hiperbólica

Como a função cotangente hiperbólica aparecerá diversas vezes neste trabalho, explicitam-se nesta seção algumas propriedades da mesma, começando com sua definição:

Definição 3.1.1. A função cotangente hiperbólica é definida como

$$\begin{aligned} \coth : \mathbb{R} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned}$$

O gráfico da função \coth é mostrado na figura 3.1.

Apesar de a função \coth não estar definida no zero, a função $g(x) = x \coth(x)$

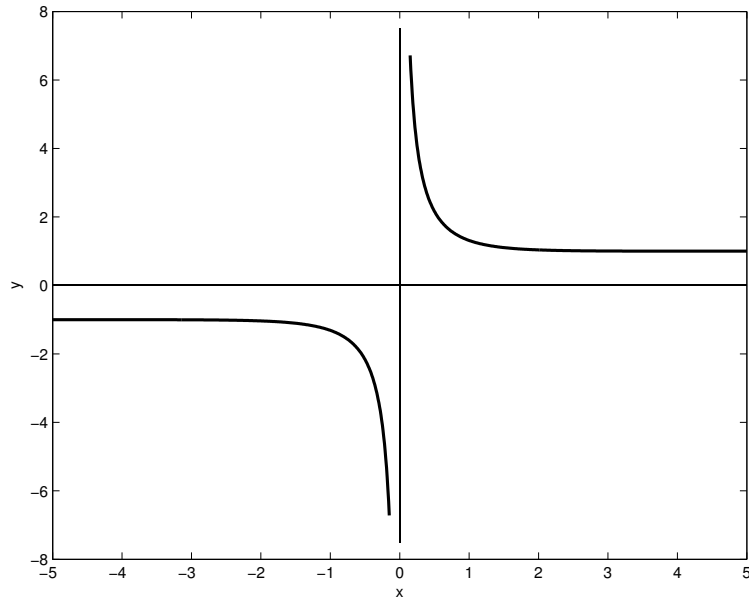


Figura 3.1: Função $\coth(x)$.

pode ser estendida por continuidade da seguinte forma, mantendo a notação:

$$x \coth(x) = \begin{cases} x \coth(x), & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

De fato, usando a regra de l'Hospital temos

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \coth(k) = \lim_{k \rightarrow 0} k \frac{e^k + e^{-k}}{e^k - e^{-k}} = 1.$$

A continuidade também pode ser observada na figura 3.2 a seguir.

O próximo lema fornece informação sobre o crescimento da função $x \coth(x)$:

Lema 3.1.2.

$$|x| \leq x \coth(x) \leq |x| + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Demonstração:

O caso $x = 0$ é trivial: $0 \leq 1 \leq 1$.

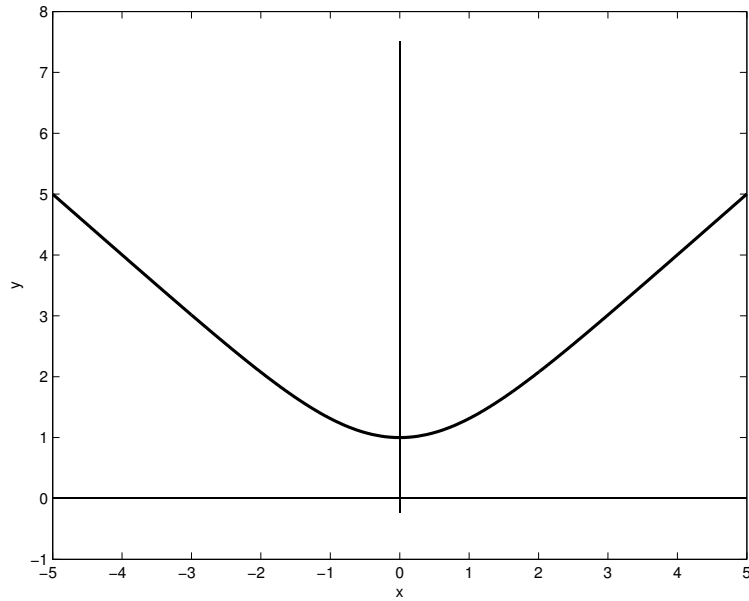


Figura 3.2: Função $x \coth(x)$.

Para $x \neq 0$, primeiramente nota-se que

$$\begin{aligned} \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} - 1} + \frac{2}{e^{2x} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1}. \end{aligned}$$

Portanto

$$y \coth x = y + \frac{2y}{e^{2x} - 1}, \quad \forall y, x \neq 0.$$

Inicia-se pela desigualdade da esquerda:

$$\forall x > 0, \quad \frac{2x}{e^{2x} - 1} > 0 \Rightarrow x \coth x = x + \frac{2x}{e^{2x} - 1} > x = |x|,$$

$$\forall x < 0, \quad \frac{2x}{e^{-2x} - 1} < 0 \Rightarrow -x \coth x = x \coth(-x) = x + \frac{2x}{e^{-2x} - 1} < x,$$

que, multiplicando por -1 , fica

$$\forall x < 0, \quad x \coth x > -x = |x|.$$

Para garantir a desigualdade da direita, usa-se o seguinte fato:

$$e^z - 1 \geq z, \quad \forall z \geq 0, \quad (3.5)$$

cujas validade é facilmente justificada pela série de Taylor da exponencial.

Se $x > 0$, tomando $z = 2x$ em (3.5), segue-se que

$$e^{2x} - 1 \geq 2x \Leftrightarrow \frac{2x}{e^{2x} - 1} \leq 1,$$

ou seja,

$$x \coth x = x + \frac{2x}{e^{2x} - 1} \leq x + 1 = |x| + 1.$$

Já no caso $x < 0$, fazendo $z = -2x$ em (3.5), segue-se que

$$e^{-2x} - 1 \geq -2x \Leftrightarrow -\frac{2x}{e^{-2x} - 1} \leq 1.$$

Da paridade de $x \coth(x)$ segue-se que

$$x \coth x = -x \coth(-x) = -x - \frac{2x}{e^{-2x} - 1},$$

e portanto

$$x \coth x \leq -x + 1 = |x| + 1,$$

que conclui a demonstração do lema. ■

Na figura 3.3 são mostradas as funções envolvidas nas desigualdades do lema 3.1.2

3.2 A equação linearizada

Nesta seção será considerada a versão linearizada da equação (3.2)

$$\eta_t + \eta_x - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}[\eta_{xt}] = 0. \quad (3.6)$$

A versão linearizada de uma equação fornece informação relevante sobre as propriedades das soluções da equação original, desde que as soluções do problema linearizado aproximem, em algum sentido, o comportamento das soluções verdadeiras. Em particular a relação de dispersão e a velocidade de fase são calculadas a partir do problema linearizado e são da maior importância no problema não linear. Por isso, são deduzidas na próxima seção.

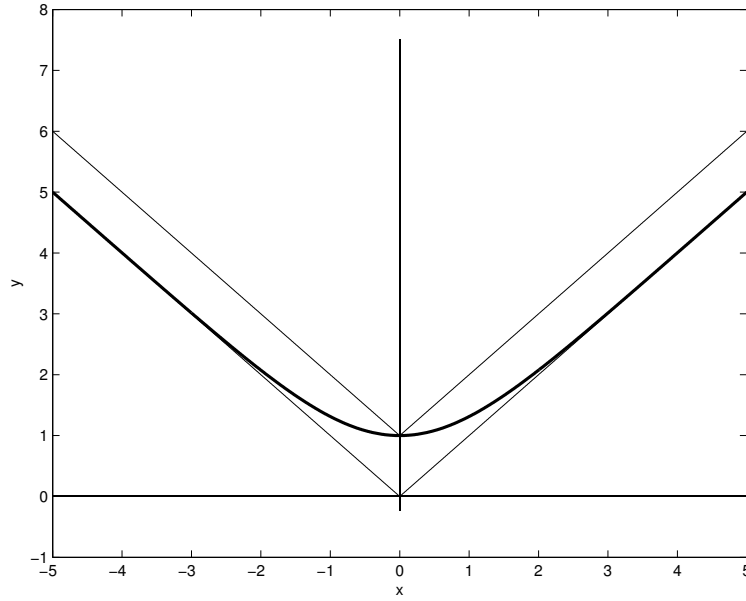


Figura 3.3: As três funções do lema 3.1.2: $|x| \leq x \coth(x) \leq |x| + 1$.

3.2.1 Relação de dispersão e velocidade de fase

Segundo Whitham (p. 03 de [44]), um sistema linear dispersivo é qualquer um que admita soluções da forma

$$a \cos(kx - \omega t),$$

onde a frequência ω é uma função real do número de onda k e a função $\omega(k)$ é determinada pelo sistema particular. A velocidade de fase é então $\frac{\omega(k)}{k}$ e usualmente diz-se que a onda é “dispersiva” se essa velocidade de fase não é constante, ou seja, depende de k . Fisicamente, o fato de a velocidade de fase não ser constante implica que pacotes de ondas no espaço da frequência, isto é, ondas concentradas num pequeno intervalo de frequências, tendem a se separar (dispersar), formando um trem oscilatório de ondas.

Para o cálculo da relação de dispersão supõe-se que a equação (3.6) possui soluções da forma

$$\eta(x, t) = e^{i(kx - \omega t)},$$

cujas partes real e imaginária são precisamente $\cos(kx - \omega t)$ e $\sin(kx - \omega t)$. Daí obtém-se a relação entre a frequência temporal ω e a frequência espacial k .

Substituindo η em (3.6) e considerando que (ver p. 28 de [36])

$$\mathcal{T}(e^{ikx}) = i \coth(kh) e^{ikx},$$

segue-se que

$$\left[-i\omega + ik - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} (ik\omega \coth(kh)) \right] e^{i(kx - \omega t)} = 0,$$

donde obtem-se a relação de dispersão

$$\omega(k) = \frac{k}{1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth(kh)} \quad (3.7)$$

e a velocidade de fase

$$\frac{\omega(k)}{k} = \frac{1}{1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth(kh)}, \quad (3.8)$$

sendo que em $k = 0$ considera-se o limite

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \coth(kh) = \frac{1}{h} \lim_{k \rightarrow 0} hk \coth(kh) = \frac{1}{h},$$

tornando a função contínua.

Assim, denotando

$$A(k) = \begin{cases} 1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth(kh), & \text{se } k \neq 0 \\ 1 + \frac{\sqrt{\beta}}{h} \frac{\rho_2}{\rho_1}, & \text{se } k = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

pode-se escrever

$$\omega(k) = \frac{k}{A(k)} \quad \text{e} \quad \frac{\omega(k)}{k} = \frac{1}{A(k)}.$$

A figura 3.4 mostra o gráfico da função $A(k)$ para valores específicos dos parâmetros.

O próximo lema trata da ordem de crescimento da função $A(k)$.

Lema 3.2.1.

$$\frac{\sqrt{1 + |k|^2}}{A(k)} \leq \max \left\{ 1, \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \right\} \quad \text{e} \quad \frac{A(k)}{\sqrt{1 + |k|^2}} \leq \sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{\beta} \rho_2}{h \rho_1} \right), \quad \forall k \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

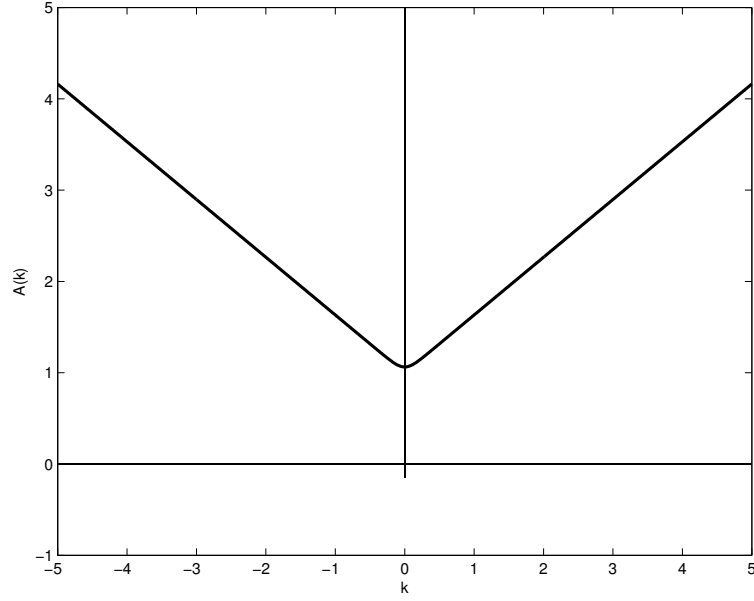


Figura 3.4: Função $A(k)$ com $\beta = 0.1$, $h = 10$, $\rho_2 = 2$ e $\rho_1 = 1$.

Demonstração: Do lema 3.1.2 segue-se que

$$h|k| \leq hk \coth(hk) \leq 1 + h|k|.$$

Multiplicando por $\frac{\sqrt{\beta} \rho_2}{h \rho_1}$ e somando um fica

$$1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} |k| \leq A(k) \leq 1 + \frac{\sqrt{\beta} \rho_2}{h \rho_1} + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} |k|. \quad (3.11)$$

Elevando ao quadrado:

$$\begin{aligned} 1 + 2\sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} |k| + \beta \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} |k|^2 &\leq A(k)^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{\sqrt{\beta} \rho_2}{h \rho_1}\right)^2 + 2 \left(1 + \frac{\sqrt{\beta} \rho_2}{h \rho_1}\right) \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} |k| + \beta \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} |k|^2. \end{aligned}$$

Usando que $2\sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} |k| \geq 0$ na parcela da esquerda e que $2ab \leq a^2 + b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ na parcela da direita obtém-se

$$1 + \beta \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} |k|^2 \leq A(k)^2 \leq 2 \left(1 + \frac{\sqrt{\beta} \rho_2}{h \rho_1}\right)^2 + 2\beta \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} |k|^2.$$

Minorando a parcela da esquerda e majorando $\beta \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}$ por $\left(1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2$ na parcela da direita obtem-se

$$\min \left\{ 1, \beta \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} \right\} (1 + |k|^2) \leq A(k)^2 \leq 2 \left(1 + \frac{\sqrt{\beta} \rho_2}{h \rho_1} \right)^2 (1 + |k|^2).$$

Elevando a $\frac{1}{2}$, já que a raiz aritmética é uma função crescente, vale

$$\min \left\{ 1, \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \right\} \sqrt{1 + |k|^2} \leq A(k) \leq \sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{\beta} \rho_2}{h \rho_1} \right) \sqrt{1 + |k|^2}.$$

Assim,

$$\frac{\sqrt{1 + |k|^2}}{A(k)} \leq \frac{1}{\min \left\{ 1, \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \right\}} = \max \left\{ 1, \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \right\}$$

$$\text{e} \quad \frac{A(k)}{\sqrt{1 + |k|^2}} \leq \sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{\beta} \rho_2}{h \rho_1} \right).$$

■

Finalizando a seção, para justificar a preferência pela equação regularizada (3.2) foram calculadas, de maneira análoga, a relação de dispersão e a velocidade de fase para a equação não regularizada (3.1), obtendo, respectivamente,

$$\omega_{\text{nreg}} = \omega_{\text{nreg}}(k) = k + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k^2 \coth(kh),$$

$$\frac{\omega_{\text{nreg}}(k)}{k} = 1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth(kh),$$

donde

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \frac{\omega(k)}{k} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|k| \rightarrow \infty} \frac{\omega_{\text{nreg}}(k)}{k} = \infty,$$

ou seja, na equação regularizada a velocidade de fase para frequências altas é limitada, enquanto na equação não regularizada esse controle não existe e a velocidade aumenta indefinidamente conforme a frequência aumenta.

3.2.2 Boa colocação via teoria de semigrupos

O objetivo desta seção é aplicar a teoria de semigrupos de operadores lineares

para demonstrar a boa colocação, no sentido da definição 2.0.1, do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s(\text{ou } H_{\text{per}}^s)) \\ \eta_t + \eta_x - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}(\eta_{xt}) = 0 \text{ em } H^s(\text{ou } H_{\text{per}}^s) \\ \eta(0) = \phi \in H^s(\text{ou } H_{\text{per}}^s), \end{cases} \quad (3.12)$$

$s \in \mathbb{R}$.

Essa é a abordagem utilizada por Borba em sua tese de doutorado [11], na qual, a partir da p. 19, trata a equação ILW linearizada com adição do termo viscoso $\mu\eta_{xx}$, $\mu > 0$.

A teoria de semigrupos de operadores lineares é uma ferramenta muito útil para a análise de equações diferenciais conhecidas como equações de evolução. A equação ILWR, que é uma equação integro-diferencial, pode ser abordada através dessa ferramenta. Para saber mais sobre a teoria pode-se consultar, por exemplo, [18]. Segue-se abaixo um resumo de parte da teoria que será utilizada aqui:

Seja X um espaço de Banach e $G : D(G) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. Para cada $\phi \in X$ considera-se o problema de Cauchy abstrato:

$$\begin{cases} \eta_t(t) = G\eta(t), & t > 0 \\ \eta(0) = \phi. \end{cases} \quad (3.13)$$

Uma solução deste problema é qualquer função $\eta : [0, \infty[\longrightarrow X$ contínua para $t \geq 0$, diferenciável para $t > 0$ (no sentido de que o limite do quociente incremental existe e pertence a X), tal que $\eta(t) \in D(G)$ para $t \geq 0$ e satisfaz o problema de Cauchy.

Nesse contexto, vale o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [18], p. 104:

Teorema 3.2.2. *Se G é o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$ de classe C_0 , então o problema de Cauchy (3.13), para cada $\phi \in D(G)$, tem uma única solução η , a saber, $\eta(t) = S(t)\phi$.*

Observação 3.2.3. $S(t)$ é chamado de *semigrupo* porque considera-se apenas $t \geq 0$. Para o problema (3.12) considera-se $t \in \mathbb{R}$, nesse caso $S(t)$ é chamado de *grupo*. \diamond

Dessa forma, para obter a boa colocação almejada é suficiente escrever o problema de Cauchy (3.12) no formato de (3.13) e garantir que o operador G resultante é gerador de um semigrupo ou grupo de classe C_0 . Atualmente são conhecidos alguns resultados clássicos que dão condições necessárias e/ou suficientes

para um operador linear ser gerador de um semigrupo ou grupo de classe C_0 , dentre eles os teoremas de Hille-Yosida, Lumer-Phillips e Stone.

O primeiro passo é identificar o operador G :

$$\eta_t - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}[\eta_{xt}] = -\eta_x,$$

$$\left(1 - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}(\partial_x)\right) \eta_t = -\partial_x \eta.$$

Aplicando a transformada de Fourier tem-se:

$$\left(1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth(kh)\right) \hat{\eta}_t = -ik \hat{\eta}.$$

Como $k \coth k > 0$ e todos os parâmetros são positivos, a quantidade entre parênteses não se anula e

$$\begin{cases} \hat{\eta}_t = \frac{-ik}{1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth(kh)} \hat{\eta}, \\ \hat{\eta}(0) = \hat{\phi}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Conclui-se assim que o operador G em questão tem multiplicador

$$m(k) = \frac{-ik}{1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth(kh)} = \frac{-ik}{A(k)},$$

ou seja,

$$\widehat{G\eta}(k) = \frac{-ik}{A(k)} \hat{\eta}(k) = m(k) \hat{\eta}(k), \quad \text{para } k \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{Z}). \quad (3.15)$$

O lema a seguir estabelece uma propriedade importante:

Lema 3.2.4. *O operador G é limitado, ou seja, $G \in \mathcal{B}(H^s, H^s)$ (ou $\mathcal{B}(H_{per}^s, H_{per}^s)$), e satisfaz*

$$\|Gf\|_s \leq \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \|f\|_s, \quad \forall f \in H^s \text{ (ou } H_{per}^s).$$

Demonstração: A partir do lema 3.1.2 tem-se

$$h|k| \leq kh \coth(kh) \leq h|k| + 1$$

$$\sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} |k| \leq \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth(kh) \leq \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} |k| + \frac{\sqrt{\beta}}{h} \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} |k| \leq 1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth(kh) \leq \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} |k| + 1 + \frac{\sqrt{\beta}}{h} \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Portanto,

$$|m(k)| = \frac{|k|}{1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth hk} \leq \frac{|k|}{1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} |k|} = \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \frac{|k|}{\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} + |k|\right)} < \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2}. \quad (3.16)$$

Assim, no caso não periódico

$$\begin{aligned} \|Gf\|_s^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| m(k) \hat{f}(k) \right|^2 dk \\ &\leq \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \hat{f}(k) \right|^2 dk = \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \right)^2 \|f\|_s^2, \end{aligned}$$

e no caso periódico

$$\begin{aligned} \|Gf\|_s^2 &= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| m(k) \hat{f}(k) \right|^2 \\ &\leq \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \right)^2 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \hat{f}(k) \right|^2 = \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \right)^2 \|f\|_s^2. \end{aligned}$$

Logo, $G \in \mathcal{B}(H^s, H^s)$ (ou $\mathcal{B}(H_{\text{per}}^s, H_{\text{per}}^s)$), e satisfaz

$$\|Gf\|_s \leq \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \|f\|_s, \quad \forall f \in H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s \text{)}.$$

■

O segundo passo é garantir que G é o gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0 . Antes disso, observa-se que a expressão (3.14) fornece uma família de equações diferenciais ordinárias no domínio da frequência, cujas soluções são:

$$\hat{\eta}(k, t) = \hat{\phi}(k) e^{\frac{-ik}{A(k)} t}.$$

Da igualdade acima tem-se que $|\hat{\eta}(k, t)| = |\hat{\phi}(k)|$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{Z}), logo

$$\|\eta(t)\|_s = \|\phi\|_s, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como, pelo teorema 3.2.2, a solução do problema de Cauchy será dada por $\eta(t) = S(t)\phi$, isto é um indício de que o grupo $S(t)$ será unitário. Com isso avalia-se que o teorema de Stone é o resultado mais apropriado a ser utilizado para garantir que G é o gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0 , visto

que trata de operadores unitários. Segue-se abaixo o teorema de Stone, conforme apresentado em [18], p. 55:

Teorema 3.2.5 (Teorema de Stone). *Seja X um espaço de Hilbert. Um operador linear $G : D(G) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0 se, e somente se, é densamente definido e $G^* = -G$, onde G^* representa o adjunto de G .*

Para o problema (3.12), o espaço de Hilbert considerado é o espaço de Sobolev $X = H^s$ (ou $X = H_{\text{per}}^s$, no caso periódico). A seguir são verificadas as condições para que o teorema de Stone possa ser aplicado:

1. G é densamente definido:

$$D(G) = \{f \in H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s); Gf \in H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s)\}$$

Observa-se que

$$|\widehat{Gf}(k)|^2 = \frac{k^2}{A(k)^2} |\hat{f}(k)|^2 \leq \frac{1+k^2}{A(k)^2} |\hat{f}(k)|^2,$$

logo, do lema (3.2.1) tem-se que

$$|\widehat{Gf}(k)|^2 \leq \max \left\{ 1, \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2} \right\}^2 |\hat{f}(k)|^2.$$

Dessa forma, conclui-se que

$$f \in H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s) \Rightarrow Gf \in H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s),$$

ou seja, que o domínio de G é $D(G) = H^s$ (ou H_{per}^s). Em particular, G é densamente definido.

2. G é linear:

Sejam $f, g \in H^s$ (ou H_{per}^s)

$$\begin{aligned}
\widehat{G(f + \alpha g)}(k) &= \frac{-ik}{A(k)} \widehat{f + \alpha g}(k) \\
&= \frac{-ik}{A(k)} \widehat{f}(k) + \alpha \frac{-ik}{A(k)} \widehat{g}(k) \\
&= \widehat{Gf}(k) + \alpha \widehat{Gg}(k) \\
&= \left(\widehat{Gf} + \alpha \widehat{Gg} \right)(k) \\
&= \widehat{(Gf + \alpha Gg)}(k).
\end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa conclui-se que

$$G(f + \alpha g) = G(f) + \alpha G(g),$$

e portanto que G é linear.

3. $G^* = -G$:

Observa-se inicialmente que,

$$G^* = -G \Leftrightarrow -iG^* = iG \Leftrightarrow (iG)^* = iG,$$

donde basta mostrar que o operador iG é autoadjunto. Sabe-se do lema 3.2.4 que o operador G é limitado. Assim, a partir da teoria de operadores adjuntos apresentada em [28] (Def.3.9-1, Teo.3.9-2 e Def.3.10-1), tem-se a existência do adjunto garantida, de modo que resta verificar que $(iG)^* = iG$.

De fato, sejam $f, g \in H^s$ (ou H_{per}^s).

$$\begin{aligned}
\widehat{iGf}(k) \overline{\widehat{g}(k)} &= \frac{k}{A(k)} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} \\
&= \widehat{f}(k) \overline{\frac{k}{A(k)} \widehat{g}(k)} \\
&= \widehat{f}(k) \overline{\widehat{iGg}(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Após multiplicar por $(1 + k^2)^s$ (ou $2\pi(1 + k^2)^s$) e integrar (ou somar) em $k \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{Z}), conclui-se que

$$\langle iGf, g \rangle_s = \langle f, iGg \rangle_s,$$

ou seja, que $(iG)^* = iG$.

Com isso, segue-se do teorema de Stone que o operador G é de fato gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0 , o qual será denotado por $S(t)$, e portanto o teorema 3.2.2 garante a boa colocação:

Teorema 3.2.6. *O problema de Cauchy (3.12), a saber,*

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s(\text{ou } H_{\text{per}}^s)) \\ \eta_t + \eta_x - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}(\eta_{xt}) = 0 \text{ em } H^s(\text{ou } H_{\text{per}}^s) \\ \eta(0) = \phi \in H^s(\text{ou } H_{\text{per}}^s), \end{cases}$$

$s \in \mathbb{R}$, tem uma única solução η , a saber, $\eta(t) = S(t)\phi$, a qual depende continuamente do dado inicial. Resumindo, o problema é globalmente bem-posto.

Para finalizar a seção, a solução $\eta(t)$ será dada explicitamente. Voltando à família de EDOs dada em (3.14) e resolvendo cada equação da família no domínio da frequência, obtem-se as seguintes soluções:

$$\hat{\eta}(k, t) = \hat{\phi}(k) e^{\frac{-ik}{A(k)}t}.$$

Assim, a solução $\eta(t)$ tem a seguinte expressão:

$$\eta(x, t) = S(t)\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left[e^{\frac{-ik}{A(k)}t} \hat{\phi}(k) \right] (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\mathcal{F}^{-1} \left[e^{\frac{-ik}{A(k)}t} \right] * \phi \right) (x), \quad (3.17)$$

no caso não periódico e

$$\eta(x, t) = S(t)\phi(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{\frac{-ik}{A(k)}t} \hat{\phi}(k) \right] (x) = \left(\mathcal{F}^{-1} \left[e^{\frac{-ik}{A(k)}t} \right] * \phi \right) (x), \quad (3.18)$$

no caso periódico, onde \mathcal{F}^{-1} denota a transformada de Fourier inversa na variável k e $*$ a convolução na variável x .

3.2.3 Boa colocação — abordagem direta

Nesta seção a boa colocação do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s(\text{ou } H_{\text{per}}^s)) \\ \eta_t + \eta_x - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}(\eta_{xt}) = 0 \text{ em } H^s(\text{ou } H_{\text{per}}^s) \\ \eta(0) = \phi \in H^s(\text{ou } H_{\text{per}}^s), \end{cases} \quad (3.19)$$

$s \in \mathbb{R}$, será novamente estudada, mas agora com uma abordagem direta, sem usar a teoria de semigrupos. O motivo pelo qual esta seção é incluída é que no caso dos sistemas de EDPs, nem sempre é fácil garantir a existência do semigrupo de classe C^0 e a abordagem direta similar à apresentada aqui representa uma alternativa viável.

Para lembrar, a expressão do operador \mathcal{T} no domínio da frequência é dada por

$$\widehat{\mathcal{T}(f)}(k) = i \coth(kh) \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{Z}).$$

Para o problema acima, a condição de dependência contínua dos dados iniciais explicita-se da seguinte forma: Se η_1 e η_2 são, respectivamente, soluções do problema (3.19) com condição inicial $\eta_1(0) = \phi_1$ e $\eta_2(0) = \phi_2$, então deve existir $C > 0$ tal que, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_s \leq C \|\phi_1 - \phi_2\|_s.$$

No caso de EDPs lineares, dependência contínua é essencialmente uma consequência de existência e unicidade, conforme veremos nas demonstrações.

Teorema 3.2.7. *O problema (3.19) tem no máximo uma solução em H^s (ou H_{per}^s) e, se ela existir, depende continuamente do dado inicial.*

Demonstração: Sejam η_1 e η_2 soluções da equação em (3.19) tais que $\eta_i(0) = \phi_i$, $i = 1, 2$. Então $w = \eta_1 - \eta_2$ satisfaz o problema

$$\begin{cases} w \in C(\mathbb{R}, H^s(\text{ou } H_{\text{per}}^s)) \\ w_t = Gw \text{ em } H^s(\text{ou } H_{\text{per}}^s) \\ w(0) = \phi_1 - \phi_2 \in H^s(\text{ou } H_{\text{per}}^s), \end{cases}$$

Aplicando o produto interno de H^s (ou H_{per}^s) por w a ambos os lados da equação tem-se

$$\langle w_t, w \rangle_s = \langle Gw, w \rangle_s.$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt} \|w\|_s^2 = \langle w_t, w \rangle_s + \langle w, w_t \rangle_s = 2\text{Re}(\langle w_t, w \rangle_s).$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} \|w\|_s^2 = 2\text{Re}(\langle Gw, w \rangle_s).$$

Agora,

$$\begin{aligned}\langle Gw, w \rangle_s &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s m(k) \hat{w}(k) \overline{\hat{w}(k)} dk \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \frac{k}{A(k)} \|\hat{w}(k)\|^2 dk,\end{aligned}$$

no caso não periódico, e

$$\begin{aligned}\langle Gw, w \rangle_s &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s m(k) \hat{w}(k) \overline{\hat{w}(k)} \\ &= -2\pi i \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \frac{k}{A(k)} \|\hat{w}(k)\|^2,\end{aligned}$$

no caso periódico.

Da demonstração do lema 3.2.4 decorre que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \frac{k}{A(k)} \|\hat{w}(k)\|^2 dk \right| \leq \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \|w\|_s^2,$$

e

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \frac{k}{A(k)} \|\hat{w}(k)\|^2 \right| \leq \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \|w\|_s^2,$$

donde a integral e a série convergem para um número real. Assim, $\langle Gw, w \rangle_s$ é imaginário puro e portanto $\frac{d}{dt} \|w\|_s = 0$, garantindo que $\|w(t)\|_s$ é constante, ou seja,

$$\|w(t)\|_s = \|w(0)\|_s = \|\phi_1 - \phi_2\|_s, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esta última igualdade garante a continuidade da solução com relação aos dados iniciais. Fazendo $\phi_1 = \phi_2$ segue-se que $\eta_1 = \eta_2$ em H^s (ou H_{per}^s), logo a solução do problema, caso exista, é única nesse espaço. ■

O próximo resultado garante a existência de solução para o problema (3.19), finalizando a boa colocação:

Teorema 3.2.8. *O problema (3.19) possui solução.*

Demonstração: Nas expressões (3.17) e (3.18) foi estabelecido que a candidata à solução é dada por

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left[e^{\frac{-ik}{A(k)}t} \hat{\phi}(k) \right] (x),$$

no caso não periódico e

$$\eta(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{\frac{-ik}{A(k)}t} \hat{\phi}(k) \right] (x),$$

no caso periódico.

É necessário mostrar que essa candidata é de fato solução do problema (3.19), ou seja, que $\eta \in C(\mathbb{R}, H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s))$, satisfaz a equação em H^s (ou H_{per}^s) e a condição inicial $\eta(0) = \phi$:

Observação 3.2.9. Na demonstração desse teorema as contas serão explicitadas somente para o caso periódico. O caso não periódico é análogo, substituindo somatório por integral e trocando a justificativa das trocas de limite com integral, que não será mais o M-teste de Weierstrass. \diamond

- $\eta(x, 0) = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{\frac{-ik}{A(k)}0} \hat{\phi}(k) \right] (x) = \mathcal{F}^{-1} [\hat{\phi}(k)] (x) = \phi(x).$
- $\eta \in C(\mathbb{R}, H_{\text{per}}^s):$

$$\begin{aligned} \|\eta(t)\|_s^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| e^{-it\frac{k}{A(k)}} \hat{\phi}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 = \|\phi\|_s^2 < \infty, \end{aligned}$$

uma vez que $\phi \in H_{\text{per}}^s$. Portanto $\eta(t) \in H_{\text{per}}^s, \forall t \in \mathbb{R}$.

Para garantir a continuidade é necessário mostrar que, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\eta(t+h) - \eta(t)\|_s = 0.$$

De fato,

$$\|\eta(t+h) - \eta(t)\|_s^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| e^{-it\frac{k}{A(k)}} \left(e^{-ih\frac{k}{A(k)}} - 1 \right) \hat{\phi}(k) \right|^2. \quad (3.20)$$

Como

$$\left| e^{-it\frac{k}{A(k)}} \left(e^{-ih\frac{k}{A(k)}} - 1 \right) \hat{\phi}(k) \right|^2 \leq \left| e^{-ih\frac{k}{A(k)}} - 1 \right|^2 |\hat{\phi}(k)|^2 \leq 4 |\hat{\phi}(k)|^2,$$

e

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s 4 |\hat{\phi}(k)|^2 = 4 \|\phi\|_s^2,$$

pelo M-Teste de Weierstrass (ver, por exemplo, [32], p. 370), segue-se que a série na igualdade (3.20) converge absolutamente e uniformemente com relação a h , donde é permitido trocar o limite com o somatório. E como

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + k^2)^s \left| e^{-it \frac{k}{A(k)}} \left(e^{-ih \frac{k}{A(k)}} - 1 \right) \hat{\phi}(k) \right|^2 = 0,$$

o resultado se segue.

- Para η satisfazer a equação é necessário que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\| \frac{\eta(t+r) - \eta(t)}{r} - G\eta(t) \right\|_s = 0,$$

uniformemente em $t \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\eta(t+r) - \eta(t)}{r} - G\eta(t) \right\|_s^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^s \left| \left(\frac{\eta(t+r) - \eta(t)}{r} - G\eta(t) \right)^\wedge(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^s \left| \frac{\hat{\eta}(t+r, k) - \hat{\eta}(t, k)}{r} + \frac{ik}{A(k)} \hat{\eta}(t, k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^s \left| \frac{e^{-ir \frac{k}{A(k)}} - 1}{r} + \frac{ik}{A(k)} \right|^2 |\hat{\eta}(t, k)|^2 \end{aligned}$$

Como

$$\left| \frac{d}{dr} \left(e^{-ir \frac{k}{A(k)}} \right) (r) \right| = \left| \frac{-ik}{A(k)} e^{-ir \frac{k}{A(k)}} \right| = \left| m(k) e^{-ir \frac{k}{A(k)}} \right| \leq |m(k)|, \quad (3.21)$$

identificando \mathbb{C} como \mathbb{R}^2 e aplicando o Teorema do Valor Médio em $[0, r]$ (ou $[r, 0]$), conforme resultado em [33], p. 89, tem-se

$$\left| \frac{e^{-ir \frac{k}{A(k)}} - 1}{r} \right| \leq |m(k)|, \quad \forall r \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, segue-se da desigualdade triangular e da limitação em (3.16) que

$$\begin{aligned}
(1+k^2)^s \left| \frac{e^{-ir\frac{k}{A(k)}} - 1}{r} - m(k) \right|^2 |\hat{\eta}(t, k)|^2 &\leq (1+k^2)^s (2|m(k)|)^2 |\hat{\eta}(t, k)|^2 \\
&\leq 4 \frac{\rho_1^2}{\beta \rho_2^2} (1+k^2)^s |\hat{\eta}(t, k)|^2 \\
&= 4 \frac{\rho_1^2}{\beta \rho_2^2} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2.
\end{aligned}$$

Com isso obtem-se

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \frac{e^{-ir\frac{k}{A(k)}} - 1}{r} + \frac{ik}{A(k)} \right|^2 |\hat{u}(t, k)|^2 \leq 4 \frac{\rho_1^2}{\beta \rho_2^2} \|\phi\|_s^2$$

e pelo M-teste de Weierstrass a convergência da série é uniforme em $t \in \mathbb{R}$.

Com isso, pode-se trocar o limite com o somatório:

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0} \left\| \frac{\eta(t+r) - \eta(t)}{r} - G\eta(t) \right\|_s &= \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \frac{e^{-ir\frac{k}{A(k)}} - 1}{r} - m(k) \right|^2 |\hat{\eta}(t, k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{e^{-ir\frac{k}{A(k)}} - 1}{r} - m(k) \right|^2 |\hat{\eta}(t, k)|^2,
\end{aligned}$$

e de (3.21) segue-se que

$$\frac{d}{dr} \left(e^{-ir\frac{k}{A(k)}} \right) (0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{-ir\frac{k}{A(k)}} - 1}{r} = m(k),$$

donde o último limite é nulo, e portanto também o somatório, concluindo finalmente que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\| \frac{\eta(t+r) - \eta(t)}{r} - G\eta(t) \right\|_s = 0.$$

■

Os teoremas 3.2.7 e 3.2.8 podem portanto ser resumidos no seguinte resultado

de boa colocação:

Teorema 3.2.10. *O problema (3.19), a saber,*

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s(\text{ou } H_{per}^s)) \\ \eta_t + \eta_x - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}(\eta_{xt}) = 0 \text{ em } H^s(\text{ou } H_{per}^s) \\ \eta(0) = \phi \in H^s(\text{ou } H_{per}^s), \end{cases}$$

$s \in \mathbb{R}$, é globalmente bem-posto. Sua única solução, que depende continuamente do dado inicial, é dada por

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left[e^{\frac{-ik}{A(k)}t} \hat{\phi}(k) \right] (x), \quad \text{no caso não periódico e}$$

$$\eta(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{\frac{-ik}{A(k)}t} \hat{\phi}(k) \right] (x), \quad \text{no caso periódico.}$$

O resultado acima já aparece em [22], com um enunciado mais geral, sendo que optou-se aqui por especificar o resultado e detalhar a demonstração.

3.3 A equação não linear

Nesta seção será considerada a equação ILWR, já mencionada no início do capítulo,

$$\eta_t + \eta_x - \frac{3}{2} \alpha \eta \eta_x - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}(\eta_{xt}) = 0, \quad (3.22)$$

onde, lembrando, o operador \mathcal{T} no domínio da frequência é dado por

$$\widehat{\mathcal{T}f}(k) = i \coth(kh) \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{Z}).$$

Para começar, a fim de identificar o operador que define a equação no domínio da frequência, aplica-se a transformada de Fourier:

$$\hat{\eta}_t(k) - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} (ik)(i \coth(kh) \hat{\eta}_t(k)) = -ik \hat{\eta}(k) + \frac{3}{2} \alpha \widehat{\eta \eta_x}(k)$$

$$\left(1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth hk \right) \hat{\eta}_t(k) = -ik \left(\hat{\eta} - \frac{3}{4} \alpha \hat{\eta}^2 \right) (k)$$

$$\hat{\eta}_t(k) = \frac{-ik}{1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth hk} \left(\hat{\eta} - \frac{3}{4} \alpha \hat{\eta}^2 \right) (k)$$

Assim, a equação pode ser escrita como

$$\eta_t = \tilde{G}\eta, \quad \text{onde } \mathcal{F}(\tilde{G}\eta)(k) = m(k) \left(\hat{\eta} - \frac{3}{4}\alpha\hat{\eta}^2 \right) (k)$$

Observação 3.3.1. O operador é formado por uma parte linear, que coincide com o operador G da equação linearizada, e uma parte não linear:

$$\tilde{G}\eta = G \left(\eta - \frac{3}{4}\alpha\eta^2 \right).$$

◇

O próximo lema estabelece uma propriedade importante do operador \tilde{G} :

Lema 3.3.2. *Seja $s > \frac{1}{2}$. Se $\eta \in H^s$ (ou H_{per}^s) então $\tilde{G}\eta \in H^s$ (ou H_{per}^s).*

Demonstração: Como $s > \frac{1}{2}$, H^s (ou H_{per}^s) é uma álgebra de Banach (ver teorema 2.1.15 (ou 2.2.17)). Assim, $\eta^2 \in H^s$ (ou H_{per}^s), e consequentemente $\eta - \frac{3}{4}\alpha\eta^2 \in H^s$ (ou H_{per}^s), de modo que o lema 3.2.4 garante

$$\tilde{G}\eta = G \left(\eta - \frac{3}{4}\alpha\eta^2 \right) \in H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s \text{)}.$$

■

3.3.1 Boa colocação local

O objetivo desta seção é demonstrar a boa colocação local do problema de Cauchy não linear:

$$\begin{cases} \eta \in C([-T, T], H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s)) \\ \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}(\eta_{xt}) = 0 \text{ em } H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s) \\ \eta(0) = \phi \in H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s), \end{cases} \quad (3.23)$$

com $s > \frac{1}{2}$.

Para isso, primeiro detalhar-se-á a definição 2.0.1 de boa colocação para o caso não linear. A definição abaixo foi extraída de [22], p. 263:

Definição 3.3.3. Sejam X, Y espaços de Banach, $T_0 \in (0, \infty)$ e $F : [-T_0, T_0] \times Y \rightarrow X$ uma função contínua. Diz-se que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \eta_t(t) = F(t, \eta(t)) & \in X \\ \eta(0) = \phi & \in Y, \end{cases} \quad (3.24)$$

é localmente bem-posto em Y se

- (a) $\exists T \in (0, T_0]$ e uma função $\eta \in C([-T, T]; Y)$ tal que $\eta(0) = \phi$ e a equação diferencial é satisfeita no seguinte sentido

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} - F(t, \eta(t)) \right\|_X = 0,$$

onde as derivadas em $t = -T$ e $t = T$ são calculadas à direita e à esquerda, respectivamente;

- (b) o problema (3.24) tem no máximo uma solução em $C([-T, T]; Y)$;

- (c) e o mapa $\phi \mapsto \eta$ é contínuo. Mais precisamente, sejam $\phi_n \in Y$, $n = 1, 2, \dots, \infty$, tais que $\phi_n \xrightarrow{Y} \phi_\infty$ e $\eta_n \in C([-T_n, T_n]; Y)$, $T_n \in (0, \infty)$, as soluções correspondentes. Seja $T \in (0, T_\infty)$. Então, $\forall n$ suficientemente grande, as soluções η_n podem ser estendidas para o intervalo $[-T, T]$ e vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[-T, T]} \|\eta_n(t) - \eta_\infty(t)\|_Y = 0.$$

Observação 3.3.4. A propriedade de permanência está implícita no item (a), ao exigir-se $\eta(t) \in Y$, $\forall t \in [-T, T]$. \diamond

A demonstração da boa colocação está dividida em partes. Primeiramente será abordada a existência de solução, que consiste em demonstrar o item (a) da definição 3.3.3. Para isso, inicia-se com a demonstração de existência de solução para o problema integral, via teorema do Ponto Fixo de Banach (teorema 2.4.5). Antes de enunciar o resultado, deduz-se a versão integral do problema:

Integrando ambos os lados de 0 a t tem-se

$$\int_0^t \eta_t(\tau) d\tau = - \int_0^t G \left(\frac{3}{4} \alpha \eta^2(\tau) - \eta(\tau) \right) d\tau,$$

que, via teorema Fundamental do Cálculo (ver, por exemplo, [32], p.324), torna-se

$$\eta(t) - \eta(0) = - \int_0^t G \left(\frac{3}{4} \alpha \eta^2(\tau) - \eta(\tau) \right) d\tau.$$

Aplicando-se a condição inicial, a expressão acima fica

$$\eta(t) = \phi - \int_0^t G \left(\frac{3}{4} \alpha \eta^2(\tau) - \eta(\tau) \right) d\tau. \quad (3.25)$$

Teorema 3.3.5. *Existe $T > 0$ e $v \in C([-T, T]; H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s))$ satisfazendo a equação integral (3.25).*

Demonstração: A fim de aplicar o teorema do Ponto Fixo de Banach define-se, para $T > 0$ e $R > 0$ quaisquer, o espaço

$$\Lambda = \Lambda(T, R, \phi) = \{v \in C([-T, T]; H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s)); d(v, \Phi) \leq R\},$$

onde $\Phi : [-T, T] \rightarrow H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s)$ é o caminho constante $\Phi(t) = \phi$, e, para $f, g \in \Lambda$,

$$d(f, g) = \sup_{t \in [-T, T]} \{\|f(t) - g(t)\|_s\}.$$

Lema 3.3.6. *(Λ, d) é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Nota-se que $\Lambda \subset C([-T, T]; H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s))$ é uma bola fechada centrada em Φ . Assim, basta mostrar que $(C([-T, T]; H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s)), d)$ é um espaço métrico completo. É fácil demonstrar que d é uma métrica, de modo que será registrada aqui apenas a demonstração da completude:

Dado $\epsilon > 0$, considera-se a sequência de Cauchy

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (C([-T, T]; H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s)), d),$$

logo $\exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq n_0$,

$$d(f_n, f_m) = \sup_{t \in [-T, T]} \{\|f_n(t) - f_m(t)\|_s\} < \epsilon.$$

Dáí tem-se

$$\forall t \in [-T, T], \quad \|f_n(t) - f_m(t)\|_s < \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_0, \quad (3.26)$$

ou seja, para cada $t \in [-T, T]$, $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s)$. Sendo $H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s)$ um espaço de Hilbert, existe, para cada $t \in [-T, T]$, $f_t \in H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s)$ tal que

$$f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_t.$$

Definindo $f : [-T, T] \rightarrow H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s)$ por $f(t) = f_t$, tem-se automaticamente a convergência pontual da sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para a função f . Desse modo falta

apenas garantir que $f \in C([-T, T]; H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s))$. De fato, aplicando o limite com $m \rightarrow \infty$ na desigualdade (3.26) e calculando o supremo, obtém-se

$$\sup_{t \in [-T, T]} \{ \|f_n(t) - f(t)\|_s \} \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

ou seja, $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniformemente em $[-T, T]$. E sendo f limite uniforme de funções contínuas, é também contínua.

Conclui-se assim que $(C([-T, T]; H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s)), d)$, e portanto (Λ, d) , é completo. ■

Nesse espaço considera-se o operador

$$\begin{aligned} J : \Lambda &\longrightarrow \Lambda \\ v &\longmapsto Jv : [-T, T] \longrightarrow H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s), \end{aligned}$$

dado por

$$Jv(t) = \phi + \int_0^t G \left(\frac{3}{4} \alpha v^2(\tau) - v(\tau) \right) d\tau.$$

Para aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach é necessário garantir duas condições.

Condição 1: Existe $T_1 > 0$ tal que para $T < T_1$ o operador $J : \Lambda \rightarrow \Lambda$ está bem definido, ou seja, $J(\Lambda) \subset \Lambda$.

De fato, basta garantir a limitação por algum $R > 0$ de $\|Jv(t) - \phi\|_s$, $\forall t \in [-T, T]$:

$$\begin{aligned} \|Jv(t) - \phi\|_s &= \left\| \int_0^t G \left(\frac{3}{4} \alpha v^2(\tau) - v(\tau) \right) d\tau \right\|_s \\ &\leq \left| \int_0^t \left\| G \left(\frac{3}{4} \alpha v^2(\tau) - v(\tau) \right) \right\|_s d\tau \right| \\ &\leq \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \left| \int_0^t \left\| \frac{3}{4} \alpha v^2(\tau) - v(\tau) \right\|_s d\tau \right|, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade foi aplicado o lema 3.2.4.

Usando a desigualdade triangular e o fato de H^s (ou H_{per}^s) ser uma álgebra de

Banach para $s > \frac{1}{2}$, segue-se que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{3}{4} \alpha v^2(\tau) - v(\tau) \right\|_s &\leq \frac{3}{4} \alpha \|v^2(\tau)\|_s + \|v(\tau)\|_s \\ &\leq \frac{3}{4} \alpha C_s \|v(\tau)\|_s^2 + \|v(\tau)\|_s \\ &= (\|v(\tau)\|_s) \left(\frac{3}{4} \alpha C_s \|v(\tau)\|_s + 1 \right), \end{aligned}$$

onde a constante C_s vem do teorema 2.1.15 (ou 2.2.17)).

Além disso, como $v \in \Lambda$,

$$\begin{aligned} \|v(\tau)\|_s &\leq \|v(\tau) - \phi\|_s + \|\phi\|_s \\ &\leq d(v, \Phi) + \|\phi\|_s \\ &\leq R + \|\phi\|_s. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|Jv(t) - \phi\|_s &\leq \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2} \left| \int_0^t (R + \|\phi\|_s) \left(\frac{3}{4} \alpha C_s (R + \|\phi\|_s) + 1 \right) d\tau \right| \\ &\leq \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2} |t| (R + \|\phi\|_s) \left(\frac{3}{4} \alpha C_s (R + \|\phi\|_s) + 1 \right) \\ &\leq \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2} T (R + \|\phi\|_s) \left(\frac{3}{4} \alpha C_s (R + \|\phi\|_s) + 1 \right). \end{aligned}$$

Para que o lado direito seja menor do que R , $\forall t \in [-T, T]$, $T < T_1$, define-se

$$T_1 = \frac{R}{\frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2} (R + \|\phi\|_s) \left(\frac{3}{4} \alpha C_s (R + \|\phi\|_s) + 1 \right)}.$$

Ou, reescrevendo

$$T_1 = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{R}{R + \|\phi\|_s} \right) \left(\frac{1}{\frac{3}{4} \alpha C_s (R + \|\phi\|_s) + 1} \right). \quad (3.27)$$

Portanto,

$$d(Jv, \Phi) = \sup_{t \in [-T, T]} \{ \|Jv(t) - \phi\|_s \} \leq R, \quad \forall T < T_1,$$

e

$$\|Jv(t)\|_s \leq \|Jv(t) - \phi\|_s + \|\phi\|_s \leq R + \|\phi\|_s,$$

ou seja, $Jv(t) \in H^s$ (ou H_{per}^s), $\forall t \in [-T, T]$, $T < T_1$.

Além disso, a partir das desigualdades obtidas acima garante-se que $\forall t, q \in [-T, T]$,

$$\begin{aligned} \|Jv(t) - Jv(q)\|_s &= \left\| \int_q^t G \left(\frac{3}{4} \alpha v^2(\tau) - v(\tau) \right) d\tau \right\|_s \\ &\leq \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} |t - q| (R + \|\phi\|_s) \left(\frac{3}{4} \alpha C_s (R + \|\phi\|_s) + 1 \right) \\ &\rightarrow 0, \text{ quando } |t - q| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto $Jv \in C([-T, T]; H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s))$, e segue-se que

$$Jv \in \Lambda, \quad \forall v \in \Lambda.$$

Condição 2: Existe $T_2 > 0$ tal que para $T < T_2$ o operador $J : \Lambda \rightarrow \Lambda$ é uma contração, ou seja, para $f, g \in \Lambda$,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|Jf(t) - Jg(t)\|_s < \sup_{t \in [0, T]} \|f(t) - g(t)\|_s.$$

De fato, para $f, g \in \Lambda$ considera-se

$$\begin{aligned} \|Jf(t) - Jg(t)\|_s &\leq \left| \int_0^t \left\| G \left(\frac{3}{4} \alpha (f^2(\tau) - g^2(\tau)) - (f(\tau) - g(\tau)) \right) \right\|_s d\tau \right| \\ &\leq \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \left| \int_0^t \left\| \frac{3}{4} \alpha (f^2(\tau) - g^2(\tau)) - (f(\tau) - g(\tau)) \right\|_s d\tau \right|. \end{aligned}$$

Novamente, usando a desigualdade triangular e o fato de H^s (ou H_{per}^s) ser uma álgebra de Banach, para $s > \frac{1}{2}$, tem-se para o integrando

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{3}{4} \alpha (f^2(\tau) - g^2(\tau)) - (f(\tau) - g(\tau)) \right\|_s \\ &= \left\| (f(\tau) - g(\tau)) \left(\frac{3}{4} \alpha (f(\tau) + g(\tau)) - 1 \right) \right\|_s \\ &\leq C_s \|f(\tau) - g(\tau)\|_s \left(\frac{3}{4} \alpha \|f(\tau) + g(\tau)\|_s + 1 \right) \\ &\leq d(f, g) C_s \left(\frac{3}{4} \alpha (\|f(\tau)\|_s + \|g(\tau)\|_s) + 1 \right), \end{aligned}$$

$\forall \tau \in [-T, T]$. Além disso, como $f, g \in \Lambda$,

$$\|f\|_s + \|g\|_s \leq 2(R + \|\phi\|_s).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|Jf(t) - Jg(t)\|_s &\leq d(f, g) \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2} \left| \int_0^t C_s \left(\frac{3}{4}\alpha 2(R + \|\phi\|_s) + 1 \right) d\tau \right| \\ &\leq d(f, g) \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2} C_s \left(\frac{3}{2}\alpha (R + \|\phi\|_s) + 1 \right) T. \end{aligned}$$

Tomando o supremo em $t \in [-T, T]$, obtem-se

$$d(Jf, Jg) \leq d(f, g) \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2} C_s \left(\frac{3}{2}\alpha (R + \|\phi\|_s) + 1 \right) T.$$

Assim, escolhendo

$$T_2 = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{1}{C_s \left(\frac{3}{2}\alpha (R + \|\phi\|_s) + 1 \right)}, \quad (3.28)$$

tem-se que

$$d(Jf, Jg) \leq d(f, g), \quad \forall T < T_2.$$

Segue-se finalmente que, para $T = \min\{T_1, T_2\}$, o operador $J : \Lambda \rightarrow \Lambda$ está bem definido e é uma contração, donde, pelo teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma única função $v \in \Lambda$ tal que $Jv = v$, ou seja, tal que

$$v(t) = \phi + \int_0^t G \left(\frac{3}{4}\alpha v^2(\tau) - v(\tau) \right) d\tau, \quad \forall t \in [-T, T]. \quad (3.29)$$

A expressão em (3.29) exprime implicitamente a solução para a formulação integral do problema (3.25), denominada solução forte do problema (conforme [43], p. 125). ■

Para garantir que a solução forte satisfaz a equação diferencial, e assim completar a demonstração do item (a), calcula-se o seguinte limite envolvendo o quociente incremental:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \tilde{G}(v(t)) \right\|_s = 0.$$

De fato, como o integrando na solução forte não depende de t ,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \tilde{G}(v(t)) \right\|_s = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \int_t^{t+h} G \left(\frac{3}{4} \alpha v^2(\tau) - v(\tau) \right) d\tau - G \left(\frac{3}{4} \alpha v^2(t) - v(t) \right) \right\|_s = 0, \end{aligned}$$

e assim a existência está garantida.

Observação 3.3.7. Apesar de valer unicidade do ponto fixo em Λ , a unicidade não está garantida em todo o espaço $C([-T, T], H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s))$. Por isso, para garantir a validade do item (b) da definição 3.3.3, é necessário estabelecer o próximo resultado, o qual baseia-se na Desigualdade de Gronwall. \diamond

Teorema 3.3.8. *O problema (3.23) tem no máximo uma solução em H^s (ou H_{per}^s).*

Demonstração: Considera-se, para $i = 1, 2$, que

$$v_i(t) = \phi_i + \int_0^t G \left(\frac{3}{4} \alpha v_i^2(\tau) - v_i(\tau) \right) d\tau$$

é a solução do problema de Cauchy (3.23) com condição inicial ϕ_i , $i = 1, 2$. Então

$$v_i \in C([-T_{\|\phi_i\|_s}, T_{\|\phi_i\|_s}], H^s \text{ (ou } H_{\text{per}}^s)).$$

Define-se $T = \min \{T_{\|\phi_1\|_s}, T_{\|\phi_2\|_s}\}$.

Calculando a norma da diferença dessas duas soluções obtém-se, através de estimativas análogas às da demonstração do teorema 3.3.5, que

$$\begin{aligned} & \|v_1(t) - v_2(t)\|_s \\ & \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_s + \left| \int_0^t \left\| G \left(\frac{3}{4} \alpha (v_1^2(\tau) - v_2^2(\tau)) - (v_1(\tau) - v_2(\tau)) \right) \right\|_s d\tau \right| \\ & \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_s + C_s \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \left| \int_0^t \|v_1(\tau) - v_2(\tau)\|_s \left(\frac{3}{4} \alpha \|v_1(\tau) + v_2(\tau)\|_s + 1 \right) d\tau \right| \\ & \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_s + C_s \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \left| \int_0^t \|v_1(\tau) - v_2(\tau)\|_s \left(\frac{3}{4} \alpha (2R + \|\phi_1\|_s + \|\phi_2\|_s) + 1 \right) d\tau \right| \\ & \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_s + C_s \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \left(\frac{3}{4} \alpha (2R + \|\phi_1\|_s + \|\phi_2\|_s) + 1 \right) \left| \int_0^t \|v_1(\tau) - v_2(\tau)\|_s d\tau \right| \end{aligned}$$

Por conta do módulo na integral, a aplicação da desigualdade de Gronwall divide-se em dois casos: $t \in [0, T]$ e $t \in [-T, 0]$. Para usar a desigualdade de

Gronwall (teorema 2.4.3), identifica-se como

$$\begin{aligned} g(t) &= \|v_1(t) - v_2(t)\|_s \\ \tilde{\alpha} &= \|\phi_1 - \phi_2\|_s \\ a &= 0 \\ \tilde{\beta} &= \begin{cases} -C_s \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2} \left(\frac{3}{4}\alpha (2R + \|\phi_1\|_s + \|\phi_2\|_s) + 1 \right), & \text{se } t \in [-T, 0] \\ C_s \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2} \left(\frac{3}{4}\alpha (2R + \|\phi_1\|_s + \|\phi_2\|_s) + 1 \right), & \text{se } t \in [0, T]. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, obtem-se

$$\|v_1(t) - v_2(t)\|_s \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_s e^{\tilde{\beta}t}, \quad \forall t \in [-T, T], \quad (3.30)$$

de modo que, supondo $\phi_1 = \phi_2$, e portanto $T = T_{\|\phi_1\|_s} = T_{\|\phi_2\|_s}$, segue-se que $v_1 = v_2$. Logo, a solução é única. ■

O próximo passo consiste em demonstrar o item (c) da definição 3.3.3:

Teorema 3.3.9. *O mapa $\phi \mapsto u$ é contínuo, ou seja, sejam $\phi_n \in H^s$ (ou H_{per}^s), $n = 1, 2, \dots, \infty$, tais que $\phi_n \xrightarrow{H^s} \phi_\infty$, $v_n \in C([-T_n, T_n]; H^s$ (ou H_{per}^s)) as soluções correspondentes. Então, $\forall n$ suficientemente grande, as soluções v_n podem ser estendidas para o intervalo $[-T, T]$, com $T \in (0, T_\infty)$ e vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[-T, T]} \|v_n(t) - v_\infty(t)\|_s = 0.$$

Demonstração: De fato, da demonstração de existência tem-se que

$$T_n = \min \{T_{1n}, T_{2n}\} = \min \left\{ \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{R}{R + \|\phi_n\|_s} \right) \left(\frac{1}{\frac{3}{4}\alpha C_s (R + \|\phi_n\|_s) + 1} \right), \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{1}{C_s \left(\frac{3}{2}\alpha (R + \|\phi_n\|_s) + 1 \right)} \right\}, \quad (3.31)$$

donde se segue que $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_\infty$, e portanto dado $T \in (0, T_\infty)$, $\forall n$ suficientemente grande, $[-T, T] \subset [-T_n, T_n]$ e v_n pode ser estendida para o intervalo $[-T, T]$.

Além disso, a mesma conta feita para obter a limitação (3.30) fornece

$$\|v_n(t) - v_\infty(t)\|_s \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_s e^{\tilde{\beta}t}, \quad \forall t \in [-T, T],$$

com

$$\tilde{\beta} = \begin{cases} -C_s \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2} \left(\frac{3}{4}\alpha (2R + \|\phi_n\|_s + \|\phi_\infty\|_s) + 1 \right), & \text{se } t \in [-T, 0] \\ C_s \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2} \left(\frac{3}{4}\alpha (2R + \|\phi_n\|_s + \|\phi_\infty\|_s) + 1 \right), & \text{se } t \in [0, T], \end{cases}$$

donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[-T, T]} \|v_n(t) - v_\infty(t)\|_s = 0.$$

■

E finalmente tem-se o seguinte resultado de boa colocação:

Teorema 3.3.10. *Sejam $s > \frac{1}{2}$ e $\phi \in H^s$. Então existe $T = T(s, \|\phi\|_s) > 0$ tal que o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} \eta \in C([-T, T], H^s \text{ (ou } H_{per}^s)) \\ \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}(\eta_{xt}) = 0 \text{ em } H^s \text{ (ou } H_{per}^s) \\ \eta(0) = \phi \in H^s \text{ (ou } H_{per}^s), \end{cases}$$

é localmente bem-posto no sentido da definição 3.3.3.

O teorema acima é original, de acordo com a revisão bibliográfica realizada.

Capítulo 4

O sistema de tipo Boussinesq para ondas intermediárias

Neste capítulo será considerado um sistema de tipo Boussinesq para ondas intermediárias e sua linearização. Mais precisamente, o sistema a ser estudado é o modelo dispersivo fracamente não linear dado por

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = b\mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \end{cases} \quad (4.1)$$

de modo que quando os parâmetros positivos a e b são definidos como

$$b = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{e} \quad a = \frac{\beta}{3},$$

tem-se o sistema (1.4) da introdução, lembrando que o operador \mathcal{T} é dado no domínio da frequência por

$$\widehat{\mathcal{T}[f]}(k) = i \coth(kh) \hat{f}(k), \quad k \neq 0. \quad (4.2)$$

A versão linearizada do sistema (4.1) é dada por

$$\begin{cases} \eta_t - u_x = 0 \\ u_t - \eta_x = b\mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}. \end{cases}$$

Observação 4.0.11. Fazendo $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ e supondo as funções de classe C^2 , a

equação da onda é recuperada:

$$\begin{cases} \eta_t - u_x = 0 \\ u_t - \eta_x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta_{tx} - u_{xx} = 0 \\ u_{tt} - \eta_{xt} = 0. \end{cases} \Rightarrow u_{xx} - u_{tt} = 0. \quad (4.3)$$

Portanto os sistemas anteriores comportam duas direções de propagação para ambas as componentes da solução, em contraste com a equação considerada no capítulo anterior. \diamond

4.1 O sistema linearizado

Linearizando o modelo (4.1) (no caso aqui considerado basta fazer $\alpha = 0$, pois a linearização é feita em torno do equilíbrio $u = 0, \eta = 0$), tem-se o modelo linearizado:

$$\begin{cases} \eta_t - u_x = 0 \\ u_t - \eta_x = b\mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}. \end{cases} \quad (4.4)$$

4.1.1 Relação de dispersão e velocidade de fase

Para calcular a relação de dispersão, o sistema linearizado (4.4) deve ser escrito como uma única equação de ordem superior. Para isso, deriva-se a segunda equação do sistema em relação a t e comuta-se o operador derivada com o operador \mathcal{T} :

$$u_{tt} - \eta_{xt} = b\mathcal{T}[u_{xtt}] + a u_{xxtt}.$$

A partir da primeira equação, $\eta_t = u_x$, elimina-se o termo envolvendo η , obtendo

$$u_{tt} - u_{xx} = b\mathcal{T}[u_{xtt}] + a u_{xxtt}. \quad (4.5)$$

Procurando soluções da forma $u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$, e usando (ver [15], p. 23) que formalmente

$$\mathcal{T}[e^{ikx}](x) = i \coth(kh) e^{ikx},$$

obtem-se a relação

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\tilde{A}(k)},$$

onde, $\tilde{A}(k) = 1 + b k \coth(kh) + a k^2$. Essa relação fornece dois modos:

$$\omega = \omega(k) = \pm \frac{|k|}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}. \quad (4.6)$$

A velocidade de fase é dada por

$$\frac{\omega(k)}{k} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + b k \coth(kh) + a k^2}}. \quad (4.7)$$

Observação 4.1.1. A velocidade de fase do sistema linearizado sem o termo $a u_{xx}$ é dada por

$$\frac{\omega(k)}{k} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A(k)}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + b k \coth(kh)}}. \quad (4.8)$$

Para fins de comparação, também registra-se aqui a velocidade de fase das equações de Euler linearizadas (ver [31] e [36], p. 48), que pode ser escrita, segundo as adimensionalizações e escalamentos adotados em (1.4), como

$$\frac{\omega(k)}{k} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\sqrt{\beta} k \coth(\sqrt{\beta} k) + b k \coth(hk)}}. \quad (4.9)$$

Usando a expansão em série

$$\sqrt{\beta} k \coth(\sqrt{\beta} k) = 1 + \frac{1}{3} \left(\sqrt{\beta} k \right)^2 + \mathcal{O}(k^4),$$

tem-se que a expressão no denominador pode ser aproximada por

$$\sqrt{\beta} k \coth(\sqrt{\beta} k) + b k \coth(hk) = 1 + a k^2 + b k \coth(hk) + \mathcal{O}(k^4) = \tilde{A}(k) + \mathcal{O}(k^4).$$

Assim, a presença do termo $a u_{xx}$ melhora a velocidade de fase para frequências baixas, no sentido de que são melhor aproximadas e o decaimento para frequências altas é mantido. A figura 4.1 traz uma comparação das três velocidades de fase: (4.7), (4.8) e (4.9). No detalhe que aparece na figura 4.2, observa-se mais precisamente tal melhora.

◇

4.1.2 Abordagem via teoria de semigrupos

O objetivo desta seção é aplicar a teoria de semigrupos de operadores lineares

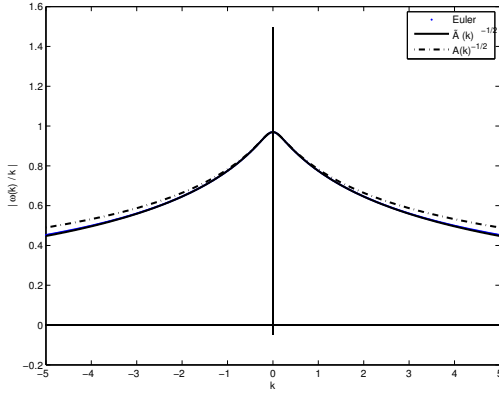


Figura 4.1: Comparação de (4.7), (4.8) e (4.9), com $\beta = 0.1$, $h = 10$, $\rho_2 = 2$ e $\rho_1 = 1$.

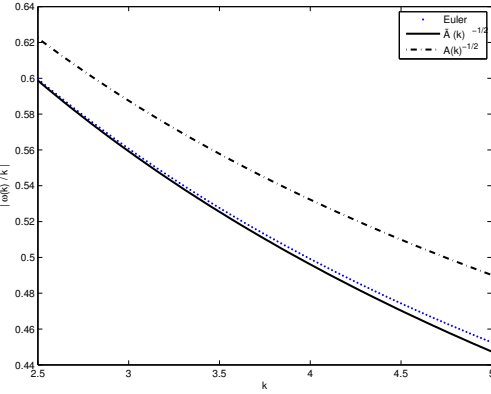


Figura 4.2: Detalhe.

para demonstrar a boa colocação, no sentido da definição 2.0.1, do problema de Cauchy linear

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C(\mathbb{R}, H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}) \\ \eta_t - u_x = 0, \\ u_t - \eta_x = b\mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \in H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}, \end{cases} \quad (4.10)$$

$s \in \mathbb{R}$.

O roteiro da demonstração e os resultados da teoria de semigrupos utilizados aqui são os mesmos já descritos na seção 3.2.2, a partir da página 50.

O sistema 4.10 pode ser escrito formalmente como

$$U_t(t) = \mathcal{G}U(t),$$

onde $U = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}$ e o operador \mathcal{G} será determinado no que se segue.

Isolando a derivada temporal, no domínio físico, obtém-se

$$\begin{cases} \eta_t = u_x \\ (1 - b\mathcal{T}\partial_x - a\partial_x^2)u_t = \eta_x. \end{cases}$$

Como no caso da equação ILWR, aplicando a transformada de Fourier, passa-

se a trabalhar no domínio da frequência,

$$\begin{cases} \hat{\eta}_t = ik\hat{u} \\ \tilde{A}(k)\hat{u}_t = ik\hat{\eta}, \end{cases}$$

e o sistema pode ser escrito matricialmente como

$$\hat{U}_t(k) = \begin{pmatrix} 0 & ik \\ -\tilde{m}(k) & 0 \end{pmatrix} \hat{U}(k),$$

onde $\tilde{m}(k) = \frac{-ik}{\tilde{A}(k)}$ e $\tilde{A}(k) = 1 + b k \coth(hk) + a k^2$, como foi definido anteriormente.

Portanto o operador \mathcal{G} satisfaz

$$\widehat{\mathcal{G}U}(k) = M(k)\hat{U}(k) = \begin{pmatrix} 0 & ik \\ -\tilde{m}(k) & 0 \end{pmatrix} \hat{U}(k)$$

e o sistema pode ser escrito de maneira concisa no domínio físico como

$$U_t(t) = \mathcal{G}U(t).$$

Os próximos lemas apresentam propriedades importantes para a quantidade $\tilde{A}(k)$ e para o operador \mathcal{G} .

Lema 4.1.2. *Existem constantes $0 < C_1(h) < 1$ e $C_2(h) \geq 1$, dependendo de h , tais que*

$$C_1(h)(1 + k^2) \leq \tilde{A}(k) \leq C_2(h)(1 + k^2), \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: O objetivo é mostrar que o quociente

$$\frac{\tilde{A}(k)}{1 + k^2} = \frac{1 + b k \coth(hk) + a k^2}{1 + k^2}$$

é limitado. De fato, como o numerador e o denominador são contínuos, e ambos estritamente positivos, a função quociente é contínua e portanto limitada em

compactos por constantes positivas. Além disso,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + b k \coth(hk) + a k^2}{1 + k^2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + k^2} + \frac{b k \coth(hk)}{1 + k^2} + \frac{a k^2}{1 + k^2} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + k^2} + \frac{b \coth(hk)}{\frac{1}{k} + k} + \frac{a}{\frac{1}{k^2} + 1} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + k^2} + \frac{b(e^{hk} + e^{-hk})}{(e^{hk} - e^{-hk}) \left(\frac{1}{k} + k\right)} + \frac{a}{\frac{1}{k^2} + 1} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + k^2} + \frac{b(1 + e^{-2hk})}{(1 - e^{-2hk}) \left(\frac{1}{k} + k\right)} + \frac{a}{\frac{1}{k^2} + 1} \\
&= 0 + 0 + a = a,
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{1 + b k \coth(hk) + a k^2}{1 + k^2} &= \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + k^2} + \frac{b(e^{2hk} + 1)}{(e^{2hk} - 1) \left(\frac{1}{k} + k\right)} + \frac{a}{\frac{1}{k^2} + 1} \\
&= 0 + 0 + a = a,
\end{aligned}$$

garantindo a limitação do quociente em toda reta real, ou seja, que existem constantes $0 < C_1(h) < 1$ e $C_2(h) > 1$ tais que

$$C_1(h) \leq \frac{\tilde{A}(k)}{1 + k^2} \leq C_2(h), \quad \forall k \in \mathbb{R},$$

donde segue o lema. ■

Para o próximo resultado, será utilizado um produto interno equivalente ao usual no espaço $H^s \times H^{s+1}$, dado no lema abaixo:

Lema 4.1.3. *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $U = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}$ e $V = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$. O produto interno definido por*

$$\langle U, V \rangle_{s, s_{\tilde{A}}} = \langle \eta, v \rangle_s + \langle u, w \rangle_{s_{\tilde{A}}},$$

onde

$$\langle u, w \rangle_{s_{\tilde{A}}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (1 + k^2)^s \tilde{A}(k) \hat{u}(k) \overline{\hat{w}(k)},$$

é equivalente ao produto interno usual de $H^s \times H^{s+1}$, a saber

$$\langle U, V \rangle_{s, s+1} = \langle \eta, v \rangle_s + \langle u, w \rangle_{s+1}.$$

Demonstração: De fato, do lema 4.1.2 tem-se

$$C_1(h)(1+k^2) \leq \tilde{A}(k) \leq C_2(h)(1+k^2),$$

donde

$$C_1(h) \langle u, w \rangle_{s+1} \leq \langle u, w \rangle_{s, \tilde{A}} \leq C_2(h) \langle u, w \rangle_{s+1},$$

e somando $\langle \eta, v \rangle_s$ em todas as parcelas obtém-se a equivalência

$$C_1(h) \langle U, V \rangle_{s, s+1} \leq \langle U, V \rangle_{s, s, \tilde{A}} \leq C_2(h) \langle U, V \rangle_{s, s+1}.$$

■

Esses produtos internos induzem as normas equivalentes

$$\sqrt{C_1(h)} \|U\|_{s, s+1} \leq \|U\|_{s, s, \tilde{A}} \leq \sqrt{C_2(h)} \|U\|_{s, s+1}, \quad (4.11)$$

que são usadas na obtenção do seguinte resultado:

Lema 4.1.4. *Seja $s \in \mathbb{R}$. O operador*

$$\mathcal{G} : H_{per}^s \times H_{per}^{s+1} \longrightarrow H_{per}^s \times H_{per}^{s+1}$$

é limitado e satisfaz

$$\|\mathcal{G}U\|_{s, s, \tilde{A}} \leq \frac{1}{C_1(h)} \|U\|_{s, s, \tilde{A}}, \quad \forall U \in H_{per}^s \times H_{per}^{s+1}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}U\|_{s, s, \tilde{A}}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |k\hat{u}(k)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \tilde{A}(k) |\tilde{m}(k)\hat{\eta}(k)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+1} \frac{k^2}{1+k^2} |\hat{u}(k)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \frac{k^2}{\tilde{A}(k)} |\hat{\eta}(k)|^2, \end{aligned}$$

pois $\tilde{m}(k) = \frac{-ik}{\tilde{A}(k)}$. Segue-se do lema 4.1.2 e de $\frac{k^2}{1+k^2} \leq 1$ que

$$\begin{aligned} C_1(h)(1+k^2) &\leq \tilde{A}(k) \\ \frac{k^2}{C_1(h)(1+k^2)} &\geq \frac{k^2}{\tilde{A}(k)} \\ \frac{1}{C_1(h)} &\geq \frac{k^2}{\tilde{A}(k)}, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}U\|_{s,s_{\tilde{A}}}^2 &\leq \|u\|_{s+1}^2 + \frac{1}{C_1(h)} \|\eta\|_s^2 \\
&\leq \frac{1}{C_1(h)} \|U\|_{s,s+1}^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{C_1(h)} \right)^2 \|U\|_{s,s_{\tilde{A}}}^2.
\end{aligned}$$

■

Para garantir que o operador \mathcal{G} é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , novamente será utilizado o teorema de Stone (teorema 3.2.5), já enunciado na p. 54. Para o problema (4.10), o espaço de Hilbert considerado é o espaço de Sobolev $X = H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}$ com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{s,s_{\tilde{A}}}$, definido acima.

Para garantir as hipóteses do teorema de Stone, seguir-se-á o mesmo roteiro utilizado para a equação ILWR:

1. \mathcal{G} é densamente definido:

De fato, do lema 4.1.4 segue-se que

$$\|\mathcal{G}U\|_{s,s_{\tilde{A}}} \leq \frac{1}{C_1(h)} \|U\|_{s,s_{\tilde{A}}}, \quad \forall U \in H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1},$$

e portanto

$$D(\mathcal{G}) = H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}.$$

Em particular, \mathcal{G} é densamente definido.

2. \mathcal{G} é linear:

De $\widehat{\mathcal{G}U}(k) = M(K)\widehat{U}(k)$ segue-se que \mathcal{G} é linear.

3. $\mathcal{G}^* = -\mathcal{G}$:

Observa-se inicialmente que,

$$\mathcal{G}^* = -\mathcal{G} \Leftrightarrow -i\mathcal{G}^* = i\mathcal{G} \Leftrightarrow (i\mathcal{G})^* = i\mathcal{G},$$

onde basta mostrar que o operador $i\mathcal{G}$ é autoadjunto. Sabe-se do lema 4.1.4 que o operador \mathcal{G} é limitado. Assim, a partir da teoria de operadores adjuntos apresentada em [28] (Def.3.9-1, Teo.3.9-2 e Def.3.10-1), tem-se a existência do adjunto garantida, de modo que resta verificar que $(i\mathcal{G})^* = i\mathcal{G}$.

Para $U = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}$ e $V = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in D(\mathcal{G}) = H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}$,

$$\begin{aligned} \langle i\mathcal{G}U, V \rangle_{s, s_{\tilde{A}}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[(1+k^2)^s (-k) \hat{u}(k) \overline{\hat{v}(k)} + (1+k^2)^s \tilde{A}(k) \left(\frac{-k}{\tilde{A}(k)} \right) \hat{\eta}(k) \overline{\hat{w}(k)} \right] \\ &= -2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[(1+k^2)^s k \hat{u}(k) \overline{\hat{v}(k)} + (1+k^2)^s k \hat{\eta}(k) \overline{\hat{w}(k)} \right], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle U, i\mathcal{G}V \rangle_{s, s_{\tilde{A}}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[(1+k^2)^s \hat{\eta}(k) \overline{(-k) \hat{w}(k)} + (1+k^2)^s \tilde{A}(k) \hat{u}(k) \overline{\left(\frac{-k}{\tilde{A}(k)} \right) \hat{v}(k)} \right] \\ &= -2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[(1+k^2)^s k \hat{\eta}(k) \overline{\hat{w}(k)} + (1+k^2)^s k \hat{u}(k) \overline{\hat{v}(k)} \right], \end{aligned}$$

Logo

$$\langle i\mathcal{G}U, V \rangle_{s, s_{\tilde{A}}} = \langle U, i\mathcal{G}V \rangle_{s, s_{\tilde{A}}}.$$

Com isso, segue-se do teorema de Stone que o operador \mathcal{G} é de fato gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0 , o qual será denotado por $S(t)$, e portanto o teorema 3.2.2 garante o seguinte resultado de boa colocação:

Teorema 4.1.5. *O problema (4.10), a saber,*

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C(\mathbb{R}, H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}) \\ \eta_t - u_x = 0, \\ u_t - \eta_x = b \mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \in H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}, \end{cases}$$

$s \in \mathbb{R}$, tem uma única solução, a saber, $(\eta(t), u(t)) = S(t)(\phi, \psi)$, a qual depende continuamente do dado inicial. Resumindo, o problema é globalmente bem-posto. Além disso,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\eta_t(t), u_t(t)) \in H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}.$$

Observação 4.1.6. Conforme enfatizado no início da seção, a versão não periódica do teorema 4.1.5 também se verifica, bastando pequenas modificações na demonstração. \diamond

Na próxima seção será dada a expressão da solução no domínio da frequência.

O teorema acima é original, de acordo com a revisão bibliográfica realizada. Sobretudo, a técnica utilizada difere da técnica encontrada em artigos que tratam sistemas semelhantes, como por exemplo [6].

4.1.3 Boa colocação — abordagem direta

O objetivo desta seção é garantir, com base na definição 2.0.1, a boa colocação do problema de Cauchy linearizado

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C(\mathbb{R}, H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}) \\ \eta_t - u_x = 0, \\ u_t - \eta_x = b \mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \in H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}, \end{cases} \quad (4.12)$$

$s \in \mathbb{R}$, com uma abordagem direta, obtendo a expressão da solução no domínio da frequência.

Observação 4.1.7. Nesta seção optou-se por redigir apenas o caso periódico. Entretanto o resultado para o caso não periódico também é válido, bastando substituir os espaços pelas versões não periódicas, os somatórios por integrais e trocar a justificativa das trocas de limite com integral, que não será mais o M-teste de Weierstrass. \diamond

Observação 4.1.8. Uma condição suficiente para garantir unicidade e continuidade da solução $(\eta(t), u(t))$ em relação aos dados iniciais (ϕ, ψ) é que exista uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right\|_{H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}} \leq C \left\| \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

\diamond

Para começar, o sistema será escrito matricialmente. Isolando a derivada temporal, no domínio físico, obtém-se

$$\begin{cases} \eta_t = u_x \\ (1 - b \mathcal{T} \partial_x - a \partial_x^2) u_t = \eta_x. \end{cases}$$

Como no caso da equação ILWR, aplicando a transformada de Fourier, passa-se a trabalhar no domínio da frequência:

$$\begin{cases} \hat{\eta}_t = ik \hat{u} \\ \tilde{A}(k) \hat{u}_t = ik \hat{\eta}, \end{cases}$$

e o sistema pode ser escrito matricialmente como

$$\hat{U}_t(k) = \begin{pmatrix} 0 & ik \\ -\tilde{m}(k) & 0 \end{pmatrix} \hat{U}(k),$$

onde $U = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}$, $\tilde{m}(k) = \frac{-ik}{\tilde{A}(k)}$ e $\tilde{A}(k) = 1 + b k \coth(hk) + a k^2$.

Lembrando que o operador \mathcal{G} denota

$$\widehat{\mathcal{G}U}(k) = M(k)\hat{U}(k) = \begin{pmatrix} 0 & ik \\ -\tilde{m}(k) & 0 \end{pmatrix} \hat{U}(k),$$

o sistema pode ser escrito de maneira concisa no domínio físico como

$$U_t(t) = \mathcal{G}U(t).$$

Observação 4.1.9. Segue-se do lema 4.1.4 e da equivalência de normas em (4.11) que

$$\|\mathcal{G}U\|_{s,s+1} \leq \min\{1, \sqrt{C_1(h)}\} \cdot \sqrt{C_2(h)} \|U\|_{s,s+1}.$$

Denotando por $C(h) = \min\{1, \sqrt{C_1(h)}\} \cdot \sqrt{C_2(h)}$, tem-se

$$\|\mathcal{G}U\|_{s,s+1} \leq C(h) \|U\|_{s,s+1}. \quad (4.13)$$

◇

A fim de obter uma candidata a solução, o operador \mathcal{G} será estudado mais detalhadamente, a começar pela diagonalização de seu multiplicador $M(k)$:

$$M(k) = \begin{pmatrix} 0 & ik \\ -\tilde{m}(k) & 0 \end{pmatrix} = -\tilde{m}(k) \begin{pmatrix} 0 & \tilde{A}(k) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores e autovetores da matriz $\begin{pmatrix} 0 & \tilde{A}(k) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ são

$$\pm \sqrt{\tilde{A}(k)} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \end{pmatrix},$$

respectivamente. Então é possível escrever

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{A}(k) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} & -\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} & -\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{A}(k)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\tilde{A}(k)} \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{A}(k) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{\tilde{A}(k)}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} & -\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{A}(k)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\tilde{A}(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Substituindo essa expressão no sistema, o mesmo pode ser escrito como

$$\hat{U}_t(k) = -\frac{ik}{2\sqrt{\tilde{A}(k)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} & -\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{A}(k)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\tilde{A}(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} & 1 \end{pmatrix} \hat{U}(k),$$

e introduzindo as novas variáveis \hat{v} e \hat{w} dadas por

$$\begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{\tilde{A}}}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}}} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{\tilde{A}}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{\tilde{A}}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{u} \end{pmatrix},$$

onde a dependência em k foi omitida, obtém-se o desacoplamento do sistema. De fato, nas novas variáveis,

$$\begin{cases} \hat{v} = \frac{\hat{\eta} + \sqrt{\tilde{A}}\hat{u}}{2} \\ \hat{w} = \frac{\hat{\eta} - \sqrt{\tilde{A}}\hat{u}}{2} \end{cases} \quad (4.14)$$

o sistema pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_t(k) \\ \hat{w}_t(k) \end{pmatrix} = -\tilde{m}(k) \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{A}(k)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\tilde{A}(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}(k) \\ \hat{w}(k) \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

A expressão matricial acima representa uma família de sistemas de EDOs, indexada em $k \in \mathbb{Z}$. Resolvendo, para cada k , o sistema (4.15) desacoplado, obtém-se como solução

$$\begin{pmatrix} \hat{v}(k, t) \\ \hat{w}(k, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}} & 0 \\ 0 & e^{-it\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}(k, 0) \\ \hat{w}(k, 0) \end{pmatrix},$$

onde, lembrando da mudança de variáveis, tem-se que

$$\hat{v}(0) = \frac{\hat{\phi} + \sqrt{\tilde{A}}\hat{\psi}}{2} \quad \text{e} \quad \hat{w}(0) = \frac{\hat{\phi} - \sqrt{\tilde{A}}\hat{\psi}}{2}.$$

Escrevendo

$$e^{it\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}} = \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right)$$

e voltando às variáveis originais, a solução pode ser escrita como

$$\begin{cases} \left(\frac{\hat{\eta} + \sqrt{\tilde{A}}\hat{u}}{2}\right)(k, t) = \left(\cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right)\right) \left(\frac{\hat{\phi} + \sqrt{\tilde{A}}\hat{\psi}}{2}\right) \\ \left(\frac{\hat{\eta} - \sqrt{\tilde{A}}\hat{u}}{2}\right)(k, t) = \left(\cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right)\right) \left(\frac{\hat{\phi} - \sqrt{\tilde{A}}\hat{\psi}}{2}\right), \end{cases}$$

donde se segue, somando e subtraindo as equações, que

$$\begin{cases} \hat{\eta}(k) = \hat{\phi}(k) \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) + i \sqrt{\tilde{A}(k)}\hat{\psi}(k) \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \\ \hat{u}(k) = \hat{\psi}(k) \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) + i \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\hat{\phi}(k) \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right), \end{cases} \quad (4.16)$$

o que pode ser escrito matricialmente como

$$\hat{U}(k) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) & i \sqrt{\tilde{A}(k)} \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \\ i \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) & \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix}.$$

Denotando a matriz por

$$\tilde{F}(t, k) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) & i\sqrt{\tilde{A}(k)}\sin\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \\ i\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\sin\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) & \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \end{pmatrix},$$

a solução do sistema pode ser escrita na forma compacta

$$\hat{U}(k) = \tilde{F}(t, k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix}.$$

A matriz $\tilde{F}(t, k)$, por sua vez, pode ser escrita decomposta como:

$$\tilde{F}(t, k) = \tilde{V}(k)H(t, k)\tilde{V}(k)^{-1},$$

onde

$$\tilde{V}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{V}(k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\tilde{A}(k)} \end{pmatrix}$$

e

$$H(t, k) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) & i\sin\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \\ i\sin\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) & \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \end{pmatrix}.$$

Assim, finalmente conclui-se que a transformada de Fourier da candidata à solução do problema (4.12) satisfaz

$$\hat{U}(k) = \tilde{V}(k)H(t, k)\tilde{V}(k)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Observação 4.1.10. Segue-se do teorema 4.1.5 que a solução do sistema é dada por

$$\begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix},$$

onde $S(t)$ é o grupo de classe C_0 gerado por \mathcal{G} . Assim,

$$\widehat{S(t) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}}(k) = \tilde{V}(k)H(t, k)\tilde{V}(k)^{-1} \widehat{\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}}(k). \quad (4.18)$$

◇

Como a candidata à solução depende do dado inicial, a observação acima su-

gere que a mesma seja denotada daqui em diante por

$$\widehat{E(t) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}}(k) = \tilde{V}(k)H(t,k)\tilde{V}(k)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Para terminar a seção, será mostrado que a candidata

$$\begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}$$

é de fato solução do problema de Cauchy (4.12).

Para começar, estabelece-se um lema inspirado em [11], no qual são usadas estimativas obtidas em [6]:

Lema 4.1.11. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Então, $\forall t \in \mathbb{R}$, $E(t) \in \mathcal{B}(H_{per}^s \times H_{per}^{s+1}, H_{per}^s \times H_{per}^{s+1})$ e $\exists C > 1$ tal que*

$$\left\| E(t) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s,s+1} \leq C \left\| \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s,s+1}, \quad \forall \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \in H_{per}^s \times H_{per}^{s+1}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} & \left\| E(t) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s,s+1}^2 \stackrel{Obs. 2.2.21}{=} \left\| \tilde{F}(t,k) \begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\psi} \end{pmatrix} \right\|_{\ell_s^2, \ell_{s+1}^2}^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \hat{\phi}(k) \cos \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t \right) + i \hat{\psi}(k) \sqrt{\tilde{A}(k)} \sin \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t \right) \right|^2 + \\ & \quad + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+1} \left| \hat{\psi}(k) \cos \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t \right) + i \hat{\phi}(k) \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \sin \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t \right) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+k^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tilde{F}(t,k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \right\|^2, \end{aligned}$$

onde a norma $\| \cdot \|$ é a norma 2 vetorial. Denotando

$$\tilde{B}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+k^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} \left\| E(t) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}}^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \tilde{F}(t, k) \tilde{B}(k)^{-1} B(k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) H(t, k) \tilde{V}(k)^{-1} \tilde{B}(k)^{-1} \tilde{B}(k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \right\|^2, \end{aligned}$$

onde, lembrando,

$$\begin{aligned} \tilde{V}(k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{V}(k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\tilde{A}(k)} \end{pmatrix} \\ \text{e } H(t, k) &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) & i \sin\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) \\ i \sin\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) & \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nota-se que a matriz $H(t, k)$ é unitária. De fato,

$$\begin{aligned} H(t, k)^* \cdot H(t, k) &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) & i \sin\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) \\ i \sin\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) & \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) & -i \sin\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) \\ -i \sin\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) & \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em particular, tem-se que

$$\|H(t, k)\|_2 = 1.$$

Observação 4.1.12. A notação $\|\cdot\|_2$ representa a norma operacional de matriz induzida pela norma 2 vetorial $\|\cdot\|$. \diamond

Assim, vale a desigualdade

$$\left\| E(t) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s, s+1}^2 \leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right\|_2^2 \left\| \left(\tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right)^{-1} \right\|_2^2 \left\| \tilde{B}(k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \right\|^2. \quad (4.20)$$

A limitação das normas operacionais

$$\left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right\|_2^2 \quad \text{e} \quad \left\| \left(\tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right)^{-1} \right\|_2^2,$$

é obtida notando que as matrizes

$$\tilde{B}(k) \tilde{V}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1+k^2}{\tilde{A}(k)}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \left(\tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\tilde{A}(k)}{1+k^2}} \end{pmatrix},$$

são diagonais. De fato, a norma 2 operacional é dada pelo maior valor singular da matriz. Os valores singulares de uma matriz A são definidos como a raiz quadrada dos autovalores do operador AA^* . Se a matriz A é diagonal, os valores singulares de A são $|\lambda|$, onde λ são os elementos da diagonal de A . Portanto, nesse caso, tem-se

$$\left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right\|_2^2 = \max \left\{ 1, \frac{1+k^2}{\tilde{A}(k)} \right\} \quad \text{e} \quad \left\| \left(\tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right)^{-1} \right\|_2^2 = \max \left\{ 1, \frac{\tilde{A}(k)}{1+k^2} \right\}. \quad (4.21)$$

Segue-se do lema 4.1.2 que

$$\max \left\{ \frac{1+k^2}{\tilde{A}(k)}, \frac{\tilde{A}(k)}{1+k^2} \right\} \leq \max \left\{ \frac{1}{C_1(h)}, C_2(h) \right\},$$

logo

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right\|_2^2 \left\| \left(\tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right)^{-1} \right\|_2^2 &= \max \left\{ 1, \frac{1+k^2}{\tilde{A}(k)} \right\} \cdot \max \left\{ 1, \frac{\tilde{A}(k)}{1+k^2} \right\} \\ &= \max \left\{ 1, \frac{1+k^2}{\tilde{A}(k)}, \frac{\tilde{A}(k)}{1+k^2} \right\} \\ &\leq \max \left\{ 1, \frac{1}{C_1(h)}, C_2(h) \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{1}{C_1(h)}, C_2(h) \right\}, \end{aligned}$$

pois $C_2(h) \geq 1$. Assim, escolhendo

$$C = \max \left\{ \frac{1}{C_1(h)}, C_2(h) \right\}$$

e substituindo na equação (4.20) obtem-se que

$$\begin{aligned} \left\| E(t) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s,s+1}^2 &\leq 2\pi C \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ &= C \left\| \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s,s+1}^2. \end{aligned}$$

■

Dessa forma, segue-se do lema 4.1.11 e da observação 4.1.10 que a candidata à solução (η, u) , obtida no domínio da frequência em (4.16), satisfaz, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \in H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1},$$

e portanto, conforme observação 4.1.8, tal solução é única e depende continuamente dos dados iniciais.

Para garantir a existência, primeiro observa-se nas expressões em (4.16) que a condição inicial é satisfeita. Para mostrar que a solução é contínua em t , considere-se $t, t_1 \in \mathbb{R}$. Contas análogas às feitas na demonstração do Lema 4.1.11 garantem que

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \eta(t_1) \\ u(t_1) \end{pmatrix} \right\|_{s,s+1}^2 &= \left\| E(t) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} - E(t_1) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s,s+1}^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) (H(t, k) - H(t_1, k)) \tilde{V}(k)^{-1} \tilde{B}(k)^{-1} \tilde{B}(k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \right\|_2^2. \end{aligned}$$

Como

$$\|H(t, k) - H(t_1, k)\|_2 \leq 2,$$

seguindo as contas da demonstração do Lema 4.1.11 obtem-se

$$\begin{aligned}
& (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) (H(t, k) - H(t_1, k)) \tilde{V}(k)^{-1} \tilde{B}(k)^{-1} \tilde{B}(k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\
& \leq (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right\|_2^2 \|H(t, k) - H(t_1, k)\|_2^2 \left\| \left(\tilde{V}(k) \tilde{B}(k) \right)^{-1} \right\|_2^2 \left\| \tilde{B}(k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\
& \leq 4C(1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \right\|_2^2.
\end{aligned}$$

Como a série numérica

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| B(k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s,s+1}^2$$

converge, segue-se do M-Teste de Weierstrass que a série

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \eta(t_1) \\ u(t_1) \end{pmatrix} \right\|_{s,s+1}^2 \\
& = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) (H(t, k) - H(t_1, k)) \tilde{V}(k)^{-1} \tilde{B}(k)^{-1} \tilde{B}(k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \right\|_2^2
\end{aligned}$$

é uniformemente convergente em t . Desse modo, é legítimo trocar limite com somatório:

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow t_1} \left\| \begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \eta(t_1) \\ u(t_1) \end{pmatrix} \right\|_{s,s+1}^2 \\
& = \lim_{t \rightarrow t_1} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) (H(t, k) - H(t_1, k)) \tilde{V}(k)^{-1} \tilde{B}(k)^{-1} \tilde{B}(k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\
& = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow t_1} (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) (H(t, k) - H(t_1, k)) \tilde{V}(k)^{-1} \tilde{B}(k)^{-1} \tilde{B}(k) \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\
& = 0,
\end{aligned}$$

o que garante a continuidade.

Sendo assim, para garantir a boa colocação basta mostrar que a candidata à solução satisfaz as equações do sistema (4.12), no seguinte sentido:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\| \frac{U(t+r) - U(t)}{r} - \mathcal{G}(U(t)) \right\|_{s,s+1} = 0, \quad (4.22)$$

onde $U = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}$.

De fato, denotando $\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{U(t+r) - U(t)}{r} - \mathcal{G}(U) \right\|_{s,s+1} &= \left\| \frac{\hat{U}(t+r) - \hat{U}(t)}{r} - M\hat{U} \right\|_{l_2^s, l_2^{s+1}} \\ &= \left\| \left(\frac{\tilde{F}(t+r) - \tilde{F}(t)}{r} - M\tilde{F}(t) \right) \hat{\Phi} \right\|_{l_2^s, l_2^{s+1}}. \end{aligned}$$

Multiplicando as matrizes do segundo fator obtém-se, para cada k fixado:

$$M(k)\tilde{F}(t,k) = \begin{pmatrix} \frac{-k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \operatorname{sen} \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t \right) & ik \cos \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t \right) \\ \frac{ik}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \cos \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t \right) & \frac{-k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \operatorname{sen} \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t \right) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \tilde{F}(t,k),$$

onde a derivada com relação a t é interpretada termo a termo.

Portanto,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{U(t+r) - U(t)}{r} - \mathcal{G}(U) \right\|_{s,s+1}^2 &= \left\| \left(\frac{\tilde{F}(t+r) - \tilde{F}(t)}{r} - \frac{d}{dt} \tilde{F}(t) \right) \hat{\Phi} \right\|_{l_2^s, l_2^{s+1}}^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \left[\left(\frac{\tilde{F}(t+r,k) - \tilde{F}(t,k)}{r} - \frac{d}{dt} \tilde{F}(t,k) \right) \hat{\Phi}(k) \right]_1 \right\|^2 \\ &\quad + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+1} \left\| \left[\left(\frac{\tilde{F}(t+r,k) - \tilde{F}(t,k)}{r} - \frac{d}{dt} \tilde{F}(t,k) \right) \hat{\Phi}(k) \right]_2 \right\|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+k^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \left(\frac{\tilde{F}(t+r,k) - \tilde{F}(t,k)}{r} - \frac{d}{dt} \tilde{F}(t,k) \right) \hat{\Phi}(k) \right\|^2, \end{aligned}$$

onde $[\cdot]_1$ e $[\cdot]_2$ denotam a primeira e a segunda coordenada do vetor, respectivamente, e $\|\cdot\|$ denota a norma 2 vetorial. Escrevendo $B(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+k^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, tem-se

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{U(t+r) - U(t)}{r} - \mathcal{G}(U) \right\|_{s,s+1}^2 = \\
& = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \left(\frac{\tilde{F}(t+r, k) - \tilde{F}(t, k)}{r} - \frac{d}{dt} \tilde{F}(t, k) \right) \tilde{B}(k)^{-1} \tilde{B}(k) \hat{\Phi}(k) \right\|^2 \\
& = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \left(\frac{H(t+r, k) - H(t, k)}{r} - \frac{d}{dt} H(t, k) \right) \tilde{V}(k)^{-1} \tilde{B}(k)^{-1} \tilde{B}(k) \hat{\Phi}(k) \right\|^2 \\
& \leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right\|_2^2 \left\| \frac{H(t+r, k) - H(t, k)}{r} - \frac{d}{dt} H(t, k) \right\|_2^2 \left\| \left(\tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right)^{-1} \right\|_2^2 \left\| \tilde{B}(k) \hat{\Phi}(k) \right\|^2.
\end{aligned}$$

Os valores da norma 2 operacional das matrizes $\tilde{B}(k)\tilde{V}(k)$ e $\left(\tilde{B}(k)\tilde{V}(k)\right)^{-1}$ são dados em (4.21). Aplicando o lema 4.1.2 é possível majorá-las por

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right\|_2^2 &= \max \left\{ 1, \frac{1+k^2}{\tilde{A}(k)} \right\} \leq \max \left\{ 1, \frac{1}{C_1(h)} \right\} \quad \text{e} \\
\left\| \left(\tilde{B}(k) \tilde{V}(k) \right)^{-1} \right\|_2^2 &= \max \left\{ 1, \frac{\tilde{A}(k)}{1+k^2} \right\} \leq \max \{1, C_2(h)\} = C_2(h).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0} \left\| \frac{U(t+r) - U(t)}{r} - \mathcal{G}(U) \right\|_{s,s+1}^2 &\leq \max \left\{ 1, \frac{1}{C_1(h)} \right\} \cdot C_2(h) \cdot 2\pi \\
&\cdot \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \frac{H(t+r, k) - H(t, k)}{r} - \frac{d}{dt} H(t, k) \right\|_2^2 \left\| \tilde{B}(k) \hat{\Phi}(k) \right\|^2. \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Conforme salientado na p. 89, a norma 2 operacional é dada pelo maior valor singular da matriz. Dessa forma, calculando os valores singulares da matriz que aparece no somatório acima, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{H(t+r, k) - H(t, k)}{r} - \frac{d}{dt} H(t, k) = \\
& \left(\begin{array}{cc} \frac{\cos\left(\frac{k(t+r)}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) - \cos\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right)}{r} + \frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \operatorname{sen}\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) & i \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k(t+r)}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right)}{r} - \frac{ik}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \cos\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) \\ i \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k(t+r)}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right)}{r} - \frac{ik}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \cos\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) & \frac{\cos\left(\frac{k(t+r)}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) - \cos\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right)}{r} + \frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \operatorname{sen}\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) \end{array} \right),
\end{aligned}$$

e observando que a matriz acima é simétrica, sua adjunta é dada por:

$$\left(\frac{H(t+r, k) - H(t, k)}{r} - \frac{d}{dt} H(t, k) \right)^* = \begin{pmatrix} \frac{\cos\left(\frac{k(t+r)}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) - \cos\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right)}{r} + \frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \operatorname{sen}\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) & \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k(t+r)}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right)}{ir} + \frac{ik}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \cos\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) \\ \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k(t+r)}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right)}{ir} + \frac{ik}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \cos\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) & \frac{\cos\left(\frac{k(t+r)}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) - \cos\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right)}{r} + \frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \operatorname{sen}\left(\frac{kt}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}\right) \end{pmatrix}.$$

Multiplicando essas duas matrizes obtém-se a matriz múltipla da identidade

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}(t+r)\right) - \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right)}{r} + \frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \right)^2 + \\ \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}(t+r)\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right)}{r} - \frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \right)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz possui um único valor singular, que fornece o valor do quadrado da norma 2 operacional da matriz:

$$\left\| \frac{H(t+r, k) - H(t, k)}{r} - \frac{d}{dt} H(t, k) \right\|_2^2 = \begin{pmatrix} \frac{\cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}(t+r)\right) - \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right)}{r} + \frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \right)^2 + \\ \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}(t+r)\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right)}{r} - \frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \right)^2,$$

donde o limite em (4.23) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
& \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left[\left(\frac{\cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}(t+r)\right) - \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right)}{r} + \frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \right)^2 \right. \\
& \left. + \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}(t+r)\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right)}{r} - \frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \right)^2 \right] \|\tilde{B}(k)\hat{\Phi}(k)\|^2.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

O M-Teste de Weierstrass será usado para garantir que a série acima converge uniformemente em r , o que permitirá trocar o limite com o somatório.

De fato, para cada $k \in \mathbb{Z}$, o Teorema do Valor Médio garante que existem

$$\theta_1 = \theta_1(k) \quad \text{e} \quad \theta_2 = \theta_2(k), \quad 0 \leq \theta_1(k), \theta_2(k) \leq 1,$$

tais que

$$\frac{\cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}(t+r)\right) - \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right)}{r} = -\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}(t + \theta_1(k)r)\right)$$

e

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}(t+r)\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right)}{r} = \frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}(t + \theta_2(k)r)\right).$$

Assim, (4.24) fica

$$\begin{aligned}
& \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \right)^2 \left[\left(\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}(t + \theta_1(k)r)\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \right)^2 \right. \\
& \left. + \left(\cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}(t + \theta_2(k)r)\right) - \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}}t\right) \right)^2 \right] \|\tilde{B}(k)\hat{\Phi}(k)\|^2. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Como $\Phi \in H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^{s+1}$,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| B(k) \hat{\Phi}(k) \right\|^2 = \|\Phi\|_{s,s+1}^2$$

converge e basta limitar

$$\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \right)^2 \left[\left(\sin \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} (t + \theta_1(k)r) \right) - \sin \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t \right) \right)^2 + \left(\cos \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} (t + \theta_2(k)r) \right) - \cos \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t \right) \right)^2 \right].$$

Cada um dos senos e dos cossenos pode ser majorado por 1. Já para o coeficiente, usando a primeira desigualdade do lema 4.1.2, obtem-se

$$\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \right)^2 = \frac{k^2}{\tilde{A}(k)} = \frac{k^2}{1+k^2} \frac{1+k^2}{\tilde{A}(k)} \leq \frac{1}{C_1(h)},$$

de modo que o somatório em (4.25) é majorado por

$$\frac{8}{C_1(h)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left\| \tilde{B}(k) \hat{\Phi}(k) \right\|^2 = \frac{8}{C_1(h)} \|\Phi\|_{s,s+1}^2.$$

Assim, o M-Teste de Weierstrass garante que o somatório em (4.25) converge uniformemente em r , donde podem-se trocar a ordem do limite e do somatório, e (4.25) fica:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \right)^2 \lim_{r \rightarrow 0} \left[\left(\sin \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} (t + \theta_1(k)r) \right) - \sin \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t \right) \right)^2 + \left(\cos \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} (t + \theta_2(k)r) \right) - \cos \left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t \right) \right)^2 \right] \left\| \tilde{B}(k) \hat{\Phi}(k) \right\|^2 = 0. \quad (4.26)$$

Voltando com o resultado deste limite em (4.23), obtem-se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\| \frac{U(t+r) - U(t)}{r} - \mathcal{G}(U) \right\|_{s,s+1}^2 \leq \max \left\{ 1, \frac{1}{C_1(h)} \right\} \cdot C_2(h) \cdot 2\pi \cdot 0 = 0,$$

como almejado em (4.22).

Desse modo, segue-se finalmente o teorema:

Teorema 4.1.13. *O problema (4.12), a saber,*

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C(\mathbb{R}, H_{per}^s \times H_{per}^{s+1}) \\ \eta_t - u_x = 0, \\ u_t - \eta_x = b \mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \in H_{per}^s \times H_{per}^{s+1}, \end{cases}$$

$s \in \mathbb{R}$, é globalmente bem-posto. Sua única solução, que depende continuamente do dado inicial, é dada por

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} (x, t) = \mathcal{F}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\phi}(k) \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) + i \sqrt{\tilde{A}(k)} \hat{\psi}(k) \sin\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) \\ \hat{\psi}(k) \cos\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) + i \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} \hat{\phi}(k) \sin\left(\frac{k}{\sqrt{\tilde{A}(k)}} t\right) \end{pmatrix} (x).$$

Além disso,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\eta_t(t), u_t(t)) \in H_{per}^s \times H_{per}^{s+1}.$$

O teorema acima é original, de acordo com a revisão bibliográfica realizada. Entretanto em [6], Alfaro, Oliveira, Ruiz de Zárate e Nachbin tratam o sistema (1.4) com $a = 0$ utilizando a mesma técnica.

Observação 4.1.14. Conforme enfatizado no início da seção, a versão não periódica do teorema 4.1.13 também se verifica, bastando pequenas modificações na demonstração. \diamond

4.2 O sistema não linear

Nesta seção será estudado o problema de Cauchy não linear

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = b \mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \\ (\eta, u)(0, x) = (\phi(x), \psi(x)), \end{cases} \quad (4.27)$$

onde $b = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1}$ e $a = \frac{\beta}{3}$, que é o objetivo principal desta tese.

Observação 4.2.1. Nesta seção optou-se por redigir apenas o caso não periódico, mas da mesma forma que nas outras seções, os resultados valem para ambos os casos. \diamond

A seguir são enunciados dois lemas técnicos com propriedades do operador transformada de Hilbert na faixa,

$$\mathcal{T}[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2h} \coth\left(\frac{\pi}{2h}(x-y)\right) f(y) dy.$$

Lema 4.2.2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}[f](x)g(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}[g](x)f(x) dx.$$

Em particular,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}[f](x)f(x) dx = 0,$$

e se f e g forem funções a valores reais, pode-se escrever

$$\langle f, \mathcal{T}[g] \rangle_s = -\langle g, \mathcal{T}[f] \rangle_s \quad e \quad \langle f, \mathcal{T}[f] \rangle_s = 0,$$

$\forall s \in \mathbb{R}$, sempre que o produto interno fizer sentido.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}[f](x)g(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2h} \coth\left(\frac{\pi}{2h}(x-y)\right) f(y) dy \right) g(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2h} \coth\left(\frac{\pi}{2h}(x-y)\right) f(y)g(x) dx dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2h} \coth\left(\frac{\pi}{2h}(y-x)\right) g(x) dx \right) f(y) dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}[g](y)f(y) dy, \end{aligned}$$

sendo que a terceira igualdade justifica-se pelo fato da função cotangente hiperbólica ser ímpar.

No caso de f e g serem funções a valores reais, a igualdade acima implica que

$$\langle f, \mathcal{T}[g] \rangle_s = -\langle g, \mathcal{T}[f] \rangle_s,$$

$\forall s \in \mathbb{R}$, sempre que o produto interno fizer sentido. \blacksquare

Lema 4.2.3.

$$\langle \mathcal{T}[f], f_x \rangle_s \geq 0,$$

$\forall s \in \mathbb{R}$, sempre que o produto interno fizer sentido.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}[f], f_x \rangle_s &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \widehat{\mathcal{T}[f]}(k) \overline{\widehat{f}_x(k)} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s i \coth hk \widehat{f}(k) \overline{ik \widehat{f}(k)} dk \\ &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s hk \coth hk \left| \widehat{f}(k) \right|^2 dk \\ &\geq \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |hk| \left| \widehat{f}(k) \right|^2 dk \geq 0, \end{aligned}$$

de acordo com o lema 3.1.2. ■

Para garantir a existência e unicidade de solução local para o problema de Cauchy não linear (4.27) será utilizado um método conhecido como regularização parabólica. Para aplicar este método, o primeiro passo é considerar o sistema regularizado, que nesse caso consiste em inserir um termo dissipativo da forma $\epsilon \eta_{xx}$ na primeira equação do sistema, com coeficiente $\epsilon > 0$. O sistema regularizado fica

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = \epsilon \eta_{xx} \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = b \mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \\ (\eta, u)(0, x) = (\phi(x), \psi(x)), \end{cases} \quad (4.28)$$

4.3 Lei de conservação

Antes de demonstrar existência e unicidade de solução local, é apresentada uma lei de conservação que deve auxiliar na demonstração de solução global para o sistema, em trabalhos futuros. Além disso, por si mesma a lei de conservação já é uma propriedade relevante do sistema. Primeiramente é demonstrada uma estimativa para o sistema regularizado (4.28), donde se segue a lei de conservação para o sistema original (4.27).

Teorema 4.3.1. *Sejam $s > \frac{1}{2}$, $\epsilon > 0$ e (η, u) solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C([0, T_{\epsilon, s}], H^{s+1} \times H^{s+1}) \\ \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = \epsilon\eta_{xx}, \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = b\mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \in H^{s+1} \times H^{s+1}. \end{cases}$$

Então,

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0),$$

onde

$$\mathcal{L}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2}{2} dx + \frac{b}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x \mathcal{T}[v] dx + \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) dx,$$

$$g(\omega) = \omega \log \omega - \omega + 1,$$

$$\omega = 1 - \alpha\eta, \quad v = \alpha u.$$

Demonstração: Definindo as novas variáveis

$$\omega = 1 - \alpha\eta \geq 0 \quad \text{e} \quad v = \alpha u,$$

o sistema (4.35) fica

$$\begin{cases} \omega_t + (\omega v)_x = \epsilon\omega_{xx}, \\ v_t + \left(\frac{v^2}{2} + \omega \right)_x = b\mathcal{T}[v_{xt}] + a v_{xxt}, \\ (\omega(0), v(0)) = (1 - \alpha\phi, \alpha\psi), \end{cases} \quad (4.29)$$

e o sistema hiperbólico associado é dado por

$$\begin{cases} \omega_t + (\omega v)_x = 0, \\ v_t + \left(\frac{v^2}{2} + \omega \right)_x = 0, \end{cases}$$

que pode ser escrito como

$$V_t + f(V)_x = 0, \quad (4.30)$$

onde $V = \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix}$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por

$$f(V) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} (V) = \begin{pmatrix} \omega v \\ \frac{v^2}{2} + \omega \end{pmatrix}.$$

Para obter as estimativas que são independentes de ϵ constroi-se uma entropia positiva convexa (no sentido de Lax) para o sistema hiperbólico associado. Um sistema no formato de (4.30) dito é hiperbólico se ∇f tem dois autovalores reais e um conjunto completo de autovetores. Diz-se que um par de funções $\rho, q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é um par de fluxo entropia-entropia (conforme [41]) se todas as soluções suaves de (4.30) satisfazem a lei de conservação adicional

$$\rho(V)_t + q(V)_x = 0.$$

Lema 4.3.2. *Seja V solução suave de (4.30). Então*

$$\rho(V)_t + q(V)_x = 0 \Leftrightarrow \nabla \rho \cdot Jf \cdot V_x = \nabla q \cdot V_x,$$

onde ∇ representa o gradiente, J a matriz jacobiana e \cdot o produto de vetores.

Demonstração: Segue da lei de conservação adicional que

$$\begin{aligned} \rho(V)_t + q(V)_x &= 0 \\ \rho_\omega \omega_t + \rho_v v_t + q_\omega \omega_x + q_v v_x &= 0 \\ \nabla \rho \cdot V_t + \nabla q \cdot V_x &= 0. \\ \nabla q \cdot V_x &= -\nabla \rho \cdot V_t. \end{aligned}$$

Por outro lado, para V solução suave de (4.30), tem-se

$$\begin{aligned} V_t + f(V)_x &= 0 \\ V_t + Jf \cdot V_x &= 0, \end{aligned}$$

e ao fazer o produto interno por $\nabla \rho$ em ambos os lados obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla \rho \cdot V_t + \nabla \rho \cdot Jf \cdot V_x &= 0 \\ \nabla \rho \cdot Jf \cdot V_x &= -\nabla \rho \cdot V_t, \end{aligned}$$

Portanto a lei de conservação adicional é satisfeita se, e somente se,

$$\nabla \rho \cdot Jf \cdot V_x = \nabla q \cdot V_x.$$

■

Sejam $\rho(V)$ e $q(V)$ um par de funções para o qual a condição de compatibilidade

$$\nabla \rho \cdot Jf = \nabla q,$$

é satisfeita. Então, $\forall V$ solução de (4.30),

$$\begin{aligned}\nabla q \cdot V_x &= \nabla \rho \cdot Jf \cdot V_x \\ q_v v_x + q_\omega \omega_x &= \rho_\omega \nabla f_1 \cdot V_x + \rho_v \nabla f_2 \cdot V_x \\ q_v v_x + q_\omega \omega_x &= \rho_\omega (v\omega_x + \omega v_x) + \rho_v (\omega_x + v v_x) \\ q_v v_x + q_\omega \omega_x &= \rho_\omega (v\omega)_x + \rho_v \left(\omega + \frac{v^2}{2} \right)_x,\end{aligned}$$

e substituindo os valores de (4.29),

$$\begin{aligned}q_v v_x + q_\omega \omega_x &= \rho_\omega (\epsilon \omega_{xx} - \omega_t) + \rho_v (b \mathcal{T} [v_{xt}] + a v_{xxt} - v_t) \\ q_v v_x + q_\omega \omega_x &= \epsilon \rho_\omega \omega_{xx} - \rho_\omega \omega_t + b \rho_v \mathcal{T} [v_{xt}] + a \rho_v v_{xxt} - \rho_v v_t \\ \rho_\omega \omega_t + \rho_v v_t + q_v v_x + q_\omega \omega_x &= \epsilon \rho_\omega \omega_{xx} + b \rho_v \mathcal{T} [v_{xt}] + a \rho_v v_{xxt} \\ \nabla \rho \cdot V_t + \nabla q \cdot V_x &= \epsilon \rho_\omega \omega_{xx} + b \rho_v \mathcal{T} [v_{xt}] + a \rho_v v_{xxt},\end{aligned}$$

ou seja, tem-se a equação de entropia

$$\epsilon \rho_\omega \omega_{xx} + b \rho_v \mathcal{T} [v_{xt}] + a \rho_v v_{xxt} = \nabla \rho \cdot V_t + \nabla q \cdot V_x. \quad (4.31)$$

Supondo

$$\rho(V) = \frac{v^2}{2} + g(\omega), \quad (4.32)$$

para alguma função g , a equação de entropia (4.31) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\nabla \rho \cdot V_t + \nabla q \cdot V_x &= \epsilon g'(\omega) \omega_{xx} + b v \mathcal{T} [v_{xt}] + a v v_{xxt} \\ \rho(V)_t + q(V)_x &= \epsilon g'(\omega) \omega_{xx} + \epsilon g''(\omega) \omega_x^2 - \epsilon g''(\omega) \omega_x^2 + b v \mathcal{T} [v_{xt}] \\ &\quad + b v_x \mathcal{T} [v_t] - b v_x \mathcal{T} [v_t] + a v v_{xxt} + a v_x v_{xt} - a v_x v_{xt} \\ &= \epsilon g(\omega)_{xx} - \epsilon g''(\omega) \omega_x^2 + b (v \mathcal{T} [v_t])_x - b v_x \mathcal{T} [v_t] \\ &\quad + a (v v_{xt})_x - a \left(\frac{v_x^2}{2} \right)_t.\end{aligned}$$

Assim, se for possível obter uma entropia ρ da forma (4.32) que seja convexa e positiva, uma integração na variável espacial de

$$\rho(V)_t + q(V)_x = \epsilon g(\omega)_{xx} - \epsilon g''(\omega) \omega_x^2 + b (v \mathcal{T} [v_t])_x - b v_x \mathcal{T} [v_t] + a (v v_{xt})_x - a \left(\frac{v_x^2}{2} \right)_t, \quad (4.33)$$

fornece uma estimativa a priori.

Escolhe-se $g(\omega) = \omega \log \omega - \omega + 1$, e portanto

$$\rho(V) = \frac{v^2}{2} + g(\omega) = \frac{v^2}{2} + \omega \log \omega - \omega + 1.$$

Observa-se inicialmente que, como $\omega \geq 0$, $\rho(V) \geq 0$. De fato, de

$$g(1) = 0 \quad \text{e} \quad g'(\omega) = \log \omega \begin{cases} > 0, & \text{se } \omega > 1, \\ < 0, & \text{se } 0 < \omega < 1, \end{cases}$$

segue-se que o valor mínimo da função g é zero, e consequentemente $\rho(V) \geq 0$ em seu domínio. Além disso, como a matriz hessiana da função ρ é positiva definida, tem-se que ρ é uma função convexa.

Assim, para mostrar que ρ é uma entropia positiva convexa para o sistema hiperbólico associado, basta mostrar que ρ satisfaz a condição de compatibilidade:

$$\nabla \rho \cdot Jf \cdot V_x = \nabla q \cdot V_x, \quad \forall V \text{ solução de (4.29)}$$

$$\text{Como } Jf \cdot V_x = f(V)_x = \begin{pmatrix} \omega_x v + \omega v_x \\ v v_x + \omega_x \end{pmatrix}, \text{ segue que}$$

$$\begin{aligned} \nabla \rho \cdot Jf \cdot V_x &= \nabla q \cdot V_x \\ \rho_\omega (\omega_x v + \omega v_x) + \rho_v (v v_x + \omega_x) &= q_\omega \omega_x + q_v v_x \\ \log \omega (\omega_x v + \omega v_x) + v (v v_x + \omega_x) &= q_\omega \omega_x + q_v v_x \\ (v \log \omega + v) \omega_x + (\omega \log \omega + v^2) v_x &= q_\omega \omega_x + q_v v_x. \end{aligned}$$

A partir disso, a função q é escolhida de modo que satisfaça

$$q_v = \omega \log \omega + v^2 \Rightarrow q = v \omega \log \omega + \frac{v^3}{3} + h(\omega),$$

$$q_\omega = v \log \omega + v = v \log \omega + v + h'(\omega).$$

Escolhendo $h \equiv 0$, tem-se as funções candidatas a formar o par de fluxo entropia-entropia, a saber,

$$\rho(V) = \frac{v^2}{2} + \omega \log \omega - \omega + 1 \quad \text{e} \quad q(V) = v \omega \log \omega + \frac{v^3}{3}.$$

Verificando a condição de compatibilidade,

$$\begin{aligned}\nabla \rho \cdot Jf \cdot V_x &= \nabla q \cdot V_x \\ \begin{pmatrix} \log \omega \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x v + \omega v_x \\ v v_x + \omega_x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v \log \omega + v \\ \omega \log \omega + v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ v_x \end{pmatrix} \\ \log \omega (\omega_x v + \omega v_x) + v (v v_x + \omega_x) &= (v \log \omega + v) \omega_x + (\omega \log \omega + v^2) v_x \\ \omega_x v \log \omega + \omega v_x \log \omega + v^2 v_x + v \omega_x &= \omega_x v \log \omega + v \omega_x + \omega v_x \log \omega + v^2 v_x,\end{aligned}$$

segue que (ρ, q) é um par de fluxo entropia-entropia, com ρ convexa e positiva.

Para obter a primeira estimativa a priori, integra-se a equação (4.33) no retângulo

$$\mathcal{R} = \{(x, \tau) | 0 \leq \tau \leq t, -N_1 \leq x \leq N_2, N_1, N_2 > 0\},$$

tem-se

$$\begin{aligned}\int \int_{\mathcal{R}} \rho(V)_t + q(V)_x dx d\tau &= \int \int_{\mathcal{R}} \epsilon g(\omega)_{xx} - \epsilon g''(\omega) \omega_x^2 + b(v \mathcal{T}[v_t])_x - b v_x \mathcal{T}[v_t] \\ &\quad + a(v v_{xt})_x - a \left(\frac{v_x^2}{2} \right)_t dx d\tau. \quad (4.34)\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência, o lado esquerdo fica

$$\begin{aligned}\int \int_{\mathcal{R}} \rho(V)_t + q(V)_x dx d\tau &= \int_{\partial \mathcal{R}} (q(V), \rho(V)) \cdot n ds \\ &= \int_0^t q(V)(N_2, \tau) - q(V)(-N_1, \tau) d\tau + \int_{-N_1}^{N_2} \rho(V)(x, t) - \rho(V)(x, 0) dx.\end{aligned}$$

Já para o lado direito tem-se

$$\begin{aligned}\int \int_{\mathcal{R}} \epsilon g(\omega)_{xx} - \epsilon g''(\omega) \omega_x^2 + b(v \mathcal{T}[v_t])_x - b v_x \mathcal{T}[v_t] + a(v v_{xt})_x - a \left(\frac{v_x^2}{2} \right)_t dx d\tau \\ = -\epsilon \int \int_{\mathcal{R}} g''(\omega) \omega_x^2 dx d\tau - \int \int_{\mathcal{R}} b v_x \mathcal{T}[v_t] + a \left(\frac{v_x^2}{2} \right)_t dx d\tau \\ + \int \int_{\mathcal{R}} b(v \mathcal{T}[v_t])_x + a(v v_{xt})_x + \epsilon g(\omega)_{xx} dx d\tau \\ = -\epsilon \int \int_{\mathcal{R}} g''(\omega) \omega_x^2 dx d\tau - \int \int_{\mathcal{R}} b v_x \mathcal{T}[v_t] + a \left(\frac{v_x^2}{2} \right)_t dx d\tau \\ + \int_0^t (b v \mathcal{T}[v_t] + a v v_{xt} + \epsilon g(\omega)_x) \Big|_{x=-N_1}^{N_2} d\tau.\end{aligned}$$

Segue do lema de Sobolev que para $s > \frac{1}{2}$, $H^s \subset C_\infty$. Assim,

$$(\eta(t), u(t)) \in H^{s+1} \times H^{s+1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\eta, u)(x, t) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} (\eta_x, u_x)(x, t) = 0,$$

donde

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\omega, v) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 - \alpha \eta, \alpha u) = (1, 0) \text{ e } \lim_{|x| \rightarrow \infty} (\omega_x, v_x) = \alpha \lim_{|x| \rightarrow \infty} (-\eta_x, u_x) = (0, 0).$$

Logo,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} b v \mathcal{T}[v_t] + a v v_{xt} + \epsilon g(\omega)_x = \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(b \mathcal{T}[v_t] + a v_{xt}) + \epsilon \omega_x \log \omega = 0.$$

Assim, fazendo $N_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$, tem-se

$$\int_0^t (b v \mathcal{T}[v_t] + a v v_{xt} + \epsilon g(\omega)_x) \Big|_{x=-N_1}^{N_2} d\tau = 0 \text{ e } \int_0^t q(V)(N_2, \tau) - q(V)(-N_1, \tau) d\tau = 0,$$

donde a igualdade (4.34) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(V)(x, t) - \rho(V)(x, 0) dx = \\ - \epsilon \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g''(\omega) \omega_x^2 dx d\tau - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} b v_x \mathcal{T}[v_t] + a \left(\frac{v_x^2}{2} \right)_t dx d\tau. \end{aligned}$$

Observação 4.3.3. Do lema 4.2.2 e da integração por partes segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_x \mathcal{T}[u_t] dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}[u_x] u_t dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}[u] u_{xt} dx,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_x \mathcal{T}[u] dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xt} \mathcal{T}[u] dx + \int_{-\infty}^{\infty} u_x \mathcal{T}[u_t] dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} u_x \mathcal{T}[u_t] dx.$$

portanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_x \mathcal{T}[u] dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_x \mathcal{T}[u_t] dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \rho(V)(x, t) - \rho(V)(x, 0) dx \\ &= -\epsilon \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g''(\omega) \omega_x^2 dx d\tau - \int_0^t \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{2} v_x \mathcal{T}[v] + a \frac{v_x^2}{2} dx d\tau \\ &= -\epsilon \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g''(\omega) \omega_x^2 dx d\tau - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{2} v_x \mathcal{T}[v] + a \frac{v_x^2}{2} dx \right) \Big|_{\tau=0}^t. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão de ρ e definindo

$$\mathcal{L}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2}{2} dx + \frac{b}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x \mathcal{T}[v] dx + \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) dx,$$

segue que

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(0) - \epsilon \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g''(\omega) \omega_x^2 dx d\tau.$$

Como $\epsilon > 0$ e $g''(\omega) = \frac{1}{\omega}$,

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0).$$

■

Teorema 4.3.4. *Sejam $s > \frac{3}{2}$ e (η, u) solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C([0, T_s], H^s \times H^{s+1}) \\ \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0, \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = b\mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \in H^s \times H^{s+1}, \end{cases}$$

Então,

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(0),$$

onde

$$\mathcal{L}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2}{2} dx + \frac{b}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x \mathcal{T}[v] dx + \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) dx,$$

$$g(\omega) = \omega \log \omega - \omega + 1,$$

$$\omega = 1 - \alpha\eta, \quad v = \alpha u.$$

Demonstração: Uma demonstração análoga a do teorema anterior, com $\epsilon = 0$,

garante que

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(0).$$

■

4.3.1 Existência e unicidade de solução local

Como já foi mencionado, para garantir a existência e unicidade de solução local para o problema de Cauchy não linear (4.27) será utilizado um método conhecido como regularização parabólica, que neste problema consiste em inserir um termo dissipativo da forma $\epsilon \eta_{xx}$ na primeira equação, com coeficiente $\epsilon > 0$, obter a existência de solução para o sistema regularizado, e em seguida garantir que, ao fazer $\epsilon \rightarrow 0$, o limite é solução do sistema original. Tal roteiro aparece no artigo [24] de Iório para a equação de Benjamin-Ono, e é adaptado aqui para o sistema de tipo Boussinesq em questão.

Para começar, será demonstrada a existência de solução local para o problema de Cauchy regularizado, conforme enunciado no teorema a seguir:

Teorema 4.3.5. *Sejam $s > \frac{1}{2}$, $\epsilon > 0$ e $(\phi, \psi) \in H^{s+1} \times H^{s+1}$. Então existe $T_{\epsilon, s} = T(s, \|\phi\|_{s+1}, \|\psi\|_{s+1}, \epsilon) > 0$ tal que, para cada ϵ , o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C([0, T_{\epsilon, s}], H^{s+1} \times H^{s+1}) \\ \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = \epsilon \eta_{xx}, \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = b \mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \in H^{s+1} \times H^{s+1}, \end{cases} \quad (4.35)$$

possui uma solução local $(\eta_\epsilon, u_\epsilon)$, no sentido forte. Além disso,

$$\forall t \in [0, T_{\epsilon, s}], \quad (\eta_t(t), u_t(t)) \in H^{s-1} \times H^{s-1}.$$

Demonstração: Primeiramente, será deduzida a versão integral deste sistema, começando pela primeira equação:

$$\eta_t - \epsilon \eta_{xx} = (u - \alpha \eta u)_x.$$

Aplicando a transformada de Fourier, tem-se

$$\hat{\eta}_t(t; k) - \epsilon (ik)^2 \hat{\eta}(t; k) = ik(\widehat{u - \alpha \eta u})(t; k),$$

que, para cada k fixo, será interpretada como uma EDO não-homogênea. A solução da equação homogênea

$$N_t(t; k) + \epsilon k^2 N(t; k) = 0$$

é $N(t; k) = c_k e^{-\epsilon k^2 t}$. Supondo $\hat{\eta}(t; k) = c_k(t) e^{-\epsilon k^2 t}$, obtem-se

$$\begin{aligned} c_k(t)' &= ik(\widehat{u - \alpha \eta u})(t; k) e^{\epsilon k^2 t} \\ c_k(t) - c_k(0) &= \int_0^t ik(\widehat{u - \alpha \eta u})(\tau; k) e^{\epsilon k^2 \tau} d\tau \\ c_k(t) - \hat{\eta}(0, k) &= \int_0^t ik(\widehat{u - \alpha \eta u})(\tau; k) e^{\epsilon k^2 \tau} d\tau \\ c_k(t) &= \hat{\phi}(k) + \int_0^t ik(\widehat{u - \alpha \eta u})(\tau; k) e^{\epsilon k^2 \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Assim,

$$\hat{\eta}(t; k) = \left[\hat{\phi}(k) + \int_0^t ik(\widehat{u - \alpha \eta u})(\tau; k) e^{\epsilon k^2 \tau} d\tau \right] e^{-\epsilon k^2 t}$$

e, formalmente,

$$\begin{aligned} \eta(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{\phi}(k) + \int_0^t ik(\widehat{u - \alpha \eta u})(\tau; k) e^{\epsilon k^2 \tau} d\tau \right] e^{ikx - \epsilon k^2 t} dk = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx - \epsilon k^2 t} \hat{\phi}(k) dk + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ike^{\epsilon k^2(\tau - t)} e^{ikx} (\widehat{u - \alpha \eta u})(\tau; k) d\tau dk. \end{aligned}$$

Desenvolvendo a transformada de Fourier a partir da definição em (2.1) e trocando formalmente a ordem das integrais, a primeira parcela fica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-z)} e^{-\epsilon k^2 t} dk \right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\epsilon k^2 t} \right] (x - z) dz.$$

Segundo [21] (p. 165, lema 1.1 (ii)),

$$\mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\epsilon k^2 t} \right] (x - z) = \sqrt{\frac{1}{2\epsilon t}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4\epsilon t}}, \quad (4.36)$$

donde a primeira parcela pode ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\epsilon}(t, x - z) \phi(z) dz = (K_{\epsilon}(t) * \phi)(x),$$

onde o núcleo do calor K_ϵ é dado por

$$K_\epsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon t}}, \quad \text{para } t > 0.$$

Desenvolvendo da mesma forma a segunda parcela, tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i k e^{\epsilon k^2(\tau-t)} e^{ikx} (\widehat{u - \alpha \eta u})(\tau; k) d\tau dk = \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i k e^{\epsilon k^2(\tau-t)} e^{ikx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (u - \alpha \eta u)(\tau, z) e^{-ikz} dz \right) dk d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (u - \alpha \eta u)(\tau, z) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i k e^{ik(x-z)} e^{\epsilon k^2(\tau-t)} dk \right) dz d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (u - \alpha \eta u)(\tau, z) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-z)} e^{\epsilon k^2(\tau-t)} dk \right) dz d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (u - \alpha \eta u)(\tau, z) \frac{d}{dx} \left(\mathcal{F}^{-1} \left[e^{\epsilon k^2(\tau-t)} \right] (x - z) \right) dz d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (u - \alpha \eta u)(\tau, z) \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{1}{2\epsilon(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4\epsilon(t-\tau)}} \right) dz d\tau \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (u - \alpha \eta u)(\tau, z) \frac{d}{dx} K_\epsilon(t - \tau, x - z) dz d\tau, \end{aligned}$$

de modo que,

$$\eta(t, x) = (K_\epsilon(t) * \phi)(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (u - \alpha \eta u)(\tau, z) \frac{d}{dx} K_\epsilon(t - \tau, x - z) dz d\tau,$$

e a primeira equação do sistema pode ser escrita na forma integral como

$$\eta(t, x) = (K_\epsilon(t) * \phi)(x) + \int_0^t \left(\frac{d}{dx} K_\epsilon(t - \tau) * (u - \alpha \eta u)(\tau) \right)(x) d\tau. \quad (4.37)$$

Passando à dedução da versão integral da segunda equação

$$u_t + \alpha u u_x - \eta_x = b \mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt},$$

isolando a derivada temporal e aplicando a transformada de Fourier obtem-se

$$\hat{u}_t(t; k) = \frac{ik}{\tilde{A}(k)} \left(\widehat{\eta - \alpha \frac{u^2}{2}} \right) (t; k) = -\tilde{m}(k) \left(\widehat{\eta - \alpha \frac{u^2}{2}} \right) (t; k),$$

onde $\tilde{m}(k) = \frac{-ik}{\tilde{A}(k)}$ e $\tilde{A}(k) = 1 + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth(kh) + ak^2$.

Integrando na variável t , definindo o operador \tilde{G} por

$$\mathcal{F} \left(\tilde{G}f \right) (k) = \tilde{m}(k) \hat{f}(k)$$

e trocando a ordem da integral em t com a da transformada de Fourier, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \int_0^t \hat{u}_\tau(\tau; k) d\tau &= \int_0^t -\tilde{m}(k) \left(\widehat{\eta - \alpha \frac{u^2}{2}} \right) (\tau, \cdot)(k) d\tau \\ \hat{u}(t; k) - \hat{u}(0; k) &= \int_0^t -\mathcal{F} \left[\tilde{G} \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau, \cdot) \right] (k) d\tau \\ \hat{u}(t; k) - \hat{\psi}(k) &= -\mathcal{F} \left[\int_0^t \tilde{G} \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau, \cdot) d\tau \right] (k). \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando a transformada de Fourier inversa, a expressão fica

$$u(t, x) = \psi(x) - \int_0^t \tilde{G} \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau, x) d\tau, \quad (4.38)$$

e a condição inicial $u(0, x) = \psi(x)$ é satisfeita.

Portanto, o sistema (4.35) pode ser escrito na forma integral como

$$\begin{cases} \eta(t, x) = (K_\epsilon(t) * \phi)(x) + \int_0^t \left(\frac{d}{dx} K_\epsilon(t - \tau) * (u - \alpha \eta u)(\tau) \right) (x) d\tau \\ u(t, x) = \psi(x) - \int_0^t \left[\tilde{G} \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau) \right] (x) d\tau, \end{cases} \quad (4.39)$$

onde,

$$K_\epsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon t}} \quad \text{e} \quad \mathcal{F} \left(\tilde{G}f \right) (k) = \tilde{m}(k) \hat{f}(k).$$

Observação 4.3.6. Segue-se da igualdade (4.36) que a transformada de Fourier do

núcleo do calor K_ϵ é dada por

$$\mathcal{F}(K_\epsilon(t, x))(k) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4\epsilon t}}\right)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\epsilon k^2 t}.$$

◇

Para mostrar que o sistema integral (4.39) tem uma solução

$$(\eta_\epsilon, u_\epsilon) \in C([0, T_{\epsilon, s}], H^{s+1} \times H^{s+1}),$$

será usado o teorema do Ponto Fixo de Banach (teorema 2.4.5).

Observação 4.3.7. O índice ϵ da solução será suprimido nesta demonstração, para não carregar a notação. ◇

Para a aplicação do teorema do Ponto Fixo de Banach, considerar-se-á o espaço métrico completo

$$\Lambda_0 = \{(\eta, u) \in C([0, T_{\epsilon, s}], H^{s+1} \times H^{s+1}) \mid d((\eta, u), (\phi, \psi)) \leq R\},$$

com a métrica

$$d((\eta, u), (\omega, v)) = \sup_{t \in [0, T_{\epsilon, s}]} \{\|(\eta(t), u(t)) - (\omega(t), v(t))\|_{s+1, s+1}\},$$

onde

$$\|(\eta(t), u(t))\|_{s+1, s+1} = \sqrt{\|\eta(t)\|_{s+1}^2 + \|u(t)\|_{s+1}^2},$$

e o operador

$$\begin{aligned} \Gamma(\eta, u) = & \left((K_\epsilon(t) * \phi)(x) + \int_0^t \left(\frac{d}{dx} K_\epsilon(t - \tau) * (u - \alpha \eta u)(\tau) \right) (x) d\tau, \right. \\ & \left. \psi(x) - \int_0^t \tilde{G} \left(\left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau) \right) (x) d\tau \right). \end{aligned}$$

Além disso, as duas condições a seguir precisam ser verificadas.

Condição 1: Existe $t_1 > 0$ tal que para $0 \leq t < t_1$ o operador $\Gamma : \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0$ está bem definido, ou seja, $\Gamma(\Lambda_0) \subset \Lambda_0$.

De fato, optando pela notação vetorial tem-se

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1} &\leq \left\| \begin{pmatrix} (K_\epsilon(t) * \phi) - \phi \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1} + \\ &+ \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} K_\epsilon(t-\tau) * (u - \alpha \eta u)(\tau) \\ \tilde{G} \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1} d\tau \end{aligned}$$

Como o núcleo do calor $K_\epsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon t}}$ é uma identidade aproximada, segue-se que

$$\|K_\epsilon(t) * \phi\|_{s+1} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \|\phi\|_{s+1}, \quad (4.40)$$

o que garante a existência de $t_{10} > 0$ tal que

$$\|((K_\epsilon(t) * \phi) - \phi)(x)\|_{s+1}^2 \leq \frac{R^2}{4}, \quad \forall t \leq t_{10},$$

ou seja,

$$\left\| \begin{pmatrix} (K_\epsilon(t) * \phi) - \phi \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1} \leq \frac{R}{2}, \quad \forall t \leq t_{10}. \quad (4.41)$$

Para a limitação do integrando, escreve-se

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} K_\epsilon(t-\tau) * (u - \alpha \eta u)(\tau) \\ \tilde{G} \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1}^2 &= \left\| \frac{d}{dx} K_\epsilon(t-\tau) * (u - \alpha \eta u)(\tau) \right\|_{s+1}^2 + \\ &+ \left\| \tilde{G} \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau) \right\|_{s+1}^2 \leq \left\| \frac{d}{dx} K_\epsilon(t-\tau) * (u - \alpha \eta u)(\tau) \right\|_{s+1} + \left\| \tilde{G} \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau) \right\|_{s+1}. \end{aligned}$$

Para a primeira parcela, usando a desigualdade de Young em H^{s+1} (teo. 2.4.2), tem-se

$$\left\| \frac{d}{dx} K_\epsilon(t-\tau) * (u - \alpha \eta u)(\tau) \right\|_{s+1} \leq \left\| \frac{d}{dx} K_\epsilon(t-\tau) \right\|_{L^1} \| (u - \alpha \eta u)(\tau) \|_{s+1}.$$

Como para $0 \leq \tau < t$ vale

$$\left\| \frac{d}{dx} K_\epsilon(t-\tau) \right\|_{L^1} = \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon(t-\tau)}},$$

segue-se que

$$\left\| \frac{d}{dx} K_\epsilon(t - \tau) * (u - \alpha \eta u)(\tau) \right\|_{s+1} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi \epsilon(t - \tau)}} \|(u - \alpha \eta u)(\tau)\|_{s+1}.$$

Por outro lado, do lema 3.2.4 tem-se

$$\left\| \tilde{G} \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau) \right\|_{s+1} \leq \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta} \rho_2} \left\| \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau) \right\|_{s+1},$$

de modo que

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} K_\epsilon(t - \tau) * (u - \alpha \eta u)(\tau) \\ \tilde{G} \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1} \leq \\ & \max \left\{ \frac{\rho_1 \sqrt{t}}{\sqrt{\beta} \rho_2}, \frac{1}{\sqrt{\pi \epsilon}} \right\} \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \left\| \begin{pmatrix} (u - \alpha \eta u)(\tau) \\ \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Como $s + 1 > \frac{3}{2}$, H^{s+1} é álgebra de Banach, e portanto

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{pmatrix} (u - \alpha \eta u)(\tau) \\ \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1}^2 = \|(u - \alpha \eta u)(\tau)\|_{s+1}^2 + \left\| \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau) \right\|_{s+1}^2 \\ & \leq \|u(\tau)\|_{s+1}^2 + \alpha^2 \|\eta u(\tau)\|_{s+1}^2 + \|\eta(\tau)\|_{s+1}^2 + \frac{\alpha^2}{4} \|u^2(\tau)\|_{s+1}^2 \\ & \leq \|u(\tau)\|_{s+1}^2 + \alpha^2 C_s^2 \|\eta(\tau)\|_{s+1}^2 \|u(\tau)\|_{s+1}^2 + \|\eta(\tau)\|_{s+1}^2 + \alpha^2 \frac{C_s^2}{4} \|u(\tau)\|_{s+1}^4 \\ & \leq \left(\|u(\tau)\|_{s+1}^2 + \|\eta(\tau)\|_{s+1}^2 \right) \left(1 + \alpha^2 C_s^2 \|u(\tau)\|_{s+1}^2 \right) \\ & \leq \left\| \begin{pmatrix} \eta(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1}^2 \left(1 + \alpha^2 C_s^2 \left\| \begin{pmatrix} \eta(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1}^2 \right). \end{aligned}$$

Além disso, para $(\eta, u) \in \Lambda_0$, a desigualdade triangular garante que

$$\left\| \begin{pmatrix} \eta(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1} \leq R + \left\| \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1}, \quad (4.43)$$

e voltando à integral tem-se

$$\int_0^t \left\| \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} K_\epsilon(t - \tau) * (u - \alpha \eta u)(\tau) \\ \tilde{G} \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right) (\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1} d\tau$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \max \left\{ \frac{\rho_1 \sqrt{t}}{\sqrt{\beta} \rho_2}, \frac{1}{\sqrt{\pi \epsilon}} \right\} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} C d\tau \\
&= C \max \left\{ \frac{\rho_1 \sqrt{t}}{\sqrt{\beta} \rho_2}, \frac{1}{\sqrt{\pi \epsilon}} \right\} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \\
&= C \max \left\{ \frac{\rho_1 \sqrt{t}}{\sqrt{\beta} \rho_2}, \frac{1}{\sqrt{\pi \epsilon}} \right\} (-2 \sqrt{t-\tau}) \Big|_0^t \\
&= 2C \max \left\{ \frac{\rho_1 \sqrt{t}}{\sqrt{\beta} \rho_2}, \frac{1}{\sqrt{\pi \epsilon}} \right\} \sqrt{t},
\end{aligned}$$

onde C denota a expressão independente de τ

$$C = \left(R + \left\| \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1} \right) \left(1 + \alpha^2 C_s^2 \left(R + \left\| \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, escolhendo

$$t_{11} = \frac{R}{4C} \min \left\{ \frac{\sqrt{\beta} \rho_2}{\rho_1}, \frac{R}{4C} \pi \epsilon \right\}, \quad (4.44)$$

e definindo $t_1 = \min\{t_{10}, t_{11}\}$, obtém-se

$$\left\| \begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1} \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R, \quad \forall t \leq t_1,$$

o que garante a validade da *Condição 1*.

Condição 2: Existe $t_2 > 0$ tal que para $t < t_2$ o operador $\Gamma : \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0$ é uma contração, ou seja, para $(\eta, u), (v, w) \in \Lambda_0 \subset H^{s+1} \times H^{s+1}$,

$$\sup_{t \in [0, t_2]} \left\| \Gamma \begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} - \Gamma \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1} < \sup_{t \in [0, t_2]} \left\| \begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1}.$$

De fato, o mesmo argumento utilizado para obter (4.42) garante que

$$\left\| \Gamma \begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} - \Gamma \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \right\|_{s+1, s+1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} K_\epsilon(t-\tau) * ((u-w) - \alpha(\eta u - v w))(\tau) \\ \tilde{G}\left((\eta-v) - \alpha \frac{(u^2-w^2)}{2}\right)(\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1} d\tau. \\
&\leq \int_0^t \max \left\{ \frac{\rho_1 \sqrt{t}}{\sqrt{\beta} \rho_2}, \frac{1}{\sqrt{\pi \epsilon}} \right\} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left\| \begin{pmatrix} (u-w)(\tau) - \alpha(\eta u - v w)(\tau) \\ (\eta-v)(\tau) - \alpha \frac{(u^2-w^2)}{2}(\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1} d\tau.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} \eta u - v w \\ \frac{(u^2-w^2)}{2} \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1}^2 &= \|\eta u - v w\|_{s+1}^2 + \left\| \frac{(u^2-w^2)}{2} \right\|_{s+1}^2 \\
&= \|(\eta-v)u + v(u-w)\|_{s+1}^2 + \frac{1}{4} \| (u-w)(u+w) \|_{s+1}^2 \\
&\leq \|\eta-v\|_{s+1}^2 \|u\|_{s+1}^2 + \|v\|_{s+1}^2 \|u-w\|_{s+1}^2 + \frac{1}{4} \|u-w\|_{s+1}^2 \|u+w\|_{s+1}^2 \\
&\leq \left(\left\| \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1}^2 + \left\| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1}^2 \right) \cdot \left(\|\eta-v\|_{s+1}^2 + \|u-w\|_{s+1}^2 + \|u-w\|_{s+1}^2 \right) \\
&\leq 2 \left(\left\| \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1}^2 + \left\| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1}^2 \right) \left\| \begin{pmatrix} \eta-v \\ u-w \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1}^2 \\
&\leq 4 \left(R + \left\| \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1} \right)^2 \left\| \begin{pmatrix} \eta-v \\ u-w \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1}^2,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue-se de 4.43.

Assim,

$$\left\| \begin{pmatrix} (u-w)(\tau) - \alpha(\eta u - v w)(\tau) \\ (\eta-v)(\tau) - \alpha \frac{(u^2-w^2)}{2}(\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1} \leq C_1 \left\| \begin{pmatrix} (\eta-v)(\tau) \\ (u-w)(\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1},$$

onde

$$C_1 = \left(1 + 2\alpha \left(R + \left\| \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1} \right) \right)$$

é uma constante que não depende de τ . Portanto

$$\left\| \Gamma \begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} - \Gamma \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1} \leq C_1 \max \left\{ \frac{\rho_1 \sqrt{t}}{\sqrt{\beta} \rho_2}, \frac{1}{\sqrt{\pi \epsilon}} \right\} \cdot \dots$$

$$\begin{aligned}
& \dots \cdot \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left\| \begin{pmatrix} (\eta-v)(\tau) \\ (u-w)(\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1} d\tau \\
& \leq C_1 \max \left\{ \frac{\rho_1 \sqrt{t}}{\sqrt{\beta} \rho_2}, \frac{1}{\sqrt{\pi \epsilon}} \right\} \sup_{t \in [0, t_2]} \left\| \begin{pmatrix} (\eta-v)(\tau) \\ (u-w)(\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \\
& = 2C_1 \max \left\{ \frac{\rho_1 \sqrt{t}}{\sqrt{\beta} \rho_2}, \frac{1}{\sqrt{\pi \epsilon}} \right\} \sqrt{t} \sup_{t \in [0, t_2]} \left\| \begin{pmatrix} (\eta-v)(\tau) \\ (u-w)(\tau) \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1},
\end{aligned}$$

e escolhendo

$$t_2 = \frac{1}{4C_1} \min \left\{ \frac{\sqrt{\beta} \rho_2}{\rho_1}, \frac{1}{4C_1} \pi \epsilon \right\}, \quad (4.45)$$

obtem-se que

$$\sup_{t \in [0, t_2]} \left\| \Gamma \begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} - \Gamma \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1} < \sup_{t \in [0, t_2]} \left\| \begin{pmatrix} \eta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \right\|_{s+1,s+1},$$

o que garante a validade da *Condição 2*.

Dessa forma, para $T_{\epsilon,s} = \min\{t_1, t_2\}$, o operador $\Gamma : \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0$ está bem definido e é uma contração. Daí, pelo teorema do Ponto Fixo de Banach (teorema 2.4.5), o operador Γ possui um único ponto fixo $(\eta_\epsilon, u_\epsilon) \in \Lambda_0$, ou seja, o sistema integral possui uma solução, denominada solução forte (conforme [43], p. 125),

$$(\eta_\epsilon, u_\epsilon) \in C([0, T_{\epsilon,s}], H^{s+1} \times H^{s+1}),$$

que é única no espaço Λ_0 . ■

Observação 4.3.8. Alguns dos próximos resultados só se verificam se as soluções obtidas no teorema anterior forem funções a valores reais. De fato, como o dado inicial é um par de funções a valores reais, as soluções obtidas têm essa propriedade, uma vez que o multiplicador do sistema é imaginário puro e ímpar, e portanto o operador que gera o sistema é real. A partir disso, o teorema do Ponto Fixo de Banach garante soluções a valores reais para todo tempo $t \in [0, T_{\epsilon,s}]$. ◇

Observação 4.3.9. Como $H^{s+1} \hookrightarrow H^s$, as soluções $(\eta_\epsilon, u_\epsilon) \in C([0, T_{\epsilon,s}], H^{s+1} \times H^{s+1})$ obtidas no último teorema satisfazem, em particular,

$$(\eta_\epsilon, u_\epsilon) \in C([0, T_{\epsilon,s}], H^s \times H^{s+1}).$$

Este será o espaço considerado nos dois teoremas a seguir. ◇

Observação 4.3.10. No teorema 4.3.5 foi garantida a existência de solução forte. O próximo teorema considera a existência de solução do problema diferencial. Seguindo o roteiro da demonstração do teorema 3.2 de [24] pode-se mostrar que a solução forte é solução do problema diferencial, e a partir daí prosseguir com os resultados.

O próximo resultado garante que as soluções obtidas no teorema 4.3.5, para cada $\epsilon > 0$, podem ser definidas em um único intervalo $[0, T_s]$, independente de ϵ .

Teorema 4.3.11. *Nas condições do teorema anterior seja, para cada $\epsilon > 0$, $(\eta_\epsilon, u_\epsilon)$ uma solução do problema de Cauchy (4.35). Então $(\eta_\epsilon, u_\epsilon)$ pode ser definida em um intervalo $[0, T_s]$, $T_s = T(s, \|\phi\|_{s+1}, \|\psi\|_{s+1}) > 0$ independente de ϵ . Além disso existem $C_3(h) > 0$ e $\rho \in C([0, T_s], \mathbb{R})$,*

$$\rho(t) = \frac{\rho(0)}{\left(1 - \frac{2\alpha C_s t}{\sqrt{C_3(h)}} \rho(0)^{\frac{1}{2}}\right)^2},$$

tais que

$$\|\eta_\epsilon(t)\|_s^2 + \|u_\epsilon(t)\|_s^2 + C_3(h)\|u_\epsilon(t)\|_{s+1}^2 \leq \rho(t) \quad e$$

$$\rho(0) = \|\phi\|_s^2 + \|\psi\|_s^2 + C_3(h)\|\psi\|_{s+1}^2, \quad \forall t \in [0, T_s].$$

Demonstração: Para simplificar a notação, o índice ϵ será omitido. Fazendo o produto interno em H^s da primeira equação do sistema (4.35) com η , da segunda com u e somando tem-se

$$\begin{aligned} \langle \eta, \eta_t \rangle_s + \langle u, u_t \rangle_s &= \langle \eta, u_x \rangle_s + \langle u, \eta_x \rangle_s - \alpha [\langle \eta, \eta_x u \rangle_s + \langle \eta, \eta u_x \rangle_s + \langle u, uu_x \rangle_s] \\ &\quad + \epsilon \langle \eta, \eta_{xx} \rangle_s + b \langle u, \mathcal{T}[u_{xt}] \rangle_s + a \langle u, u_{xt} \rangle_s. \end{aligned}$$

Observação 4.3.12. Para f e g funções a valores reais, da propriedade de conjugação apresentada na tabela 2.1, vale

$$\widehat{f}(-l) = \overline{\widehat{f}(l)} \quad e \quad \widehat{g}(-l) = \overline{\widehat{g}(l)},$$

e portanto, $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\langle f, g_x \rangle_s &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}_x(k)} dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \widehat{f}(k) (-ik) \overline{\widehat{g}(k)} dk \\
&\stackrel{k=-l}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (1+l^2)^s \widehat{f}(-l) il \overline{\widehat{g}(-l)} dl \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} (1+l^2)^s \overline{\widehat{f}(l)} \widehat{g}(l) dl \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} (1+l^2)^s \widehat{f_x}(l) \widehat{g}(l) dl \\
&= - \langle g, f_x \rangle_s.
\end{aligned}$$

Portanto, sempre que os produtos internos fizerem sentido,

$$\langle f, g_x \rangle_s + \langle g, f_x \rangle_s = 0. \quad (4.46)$$

◇

Considerando que η e u são funções a valores reais, a observação acima e o lema 4.2.2 garantem que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\eta\|_s^2 + \|u\|_s^2) &= -\alpha [\langle \eta, \eta_x u \rangle_s + \langle \eta, \eta u_x \rangle_s + \langle u, uu_x \rangle_s] \\
&\quad - \epsilon \langle \eta_x, \eta_x \rangle_s + \langle b\mathcal{T}[u_x] + au_{xx}, u_t \rangle_s. \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Observação 4.3.13. Utilizando a mesma técnica de demonstração do lema 4.1.2 obtem-se $C_3(h), C_4(h) > 0$ tais que

$$C_3(h)(1+k^2)^{s+1} \leq (1+k^2)^s (bk \coth(hk) + ak^2) \leq C_4(h)(1+k^2)^{s+1},$$

donde, para $u(t) \in H^{s+1}$,

$$\begin{aligned}
C_3(h) \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+1} \widehat{u}(k) \overline{\widehat{u}_t(k)} dk &\leq - \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s (b i \coth(hk) + a ik) ik \widehat{u}(k) \overline{\widehat{u}_t(k)} dk \\
&\leq C_4(h) \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+1} \widehat{u}(k) \overline{\widehat{u}_t(k)} dk, \\
C_3(h) \langle u, u_t \rangle_{s+1} &\leq - \langle b\mathcal{T}[u_x] + au_{xx}, u_t \rangle_s \leq C_4(h) \langle u, u_t \rangle_{s+\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$-\frac{C_4(h)}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{s+1}^2 \leq \langle b\mathcal{T}[u_x] + au_{xx}, u_t \rangle_s \leq -\frac{C_3(h)}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{s+1}^2.$$

◇

Assim, pela observação acima, a equação (4.47) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\eta\|_s^2 + \|u\|_s^2 + C_3(h) \|u\|_{s+1}^2 \right) \\ \leq -\alpha (\langle u\eta_x, \eta \rangle_s + \langle \eta u_x, \eta \rangle_s + \langle u u_x, u \rangle_s) - \epsilon \|\eta_x\|_s^2. \end{aligned}$$

Do lema 2.1.18 tem-se

$$|\langle u\eta_x, \eta \rangle_s| \leq C_s \|u\|_s \|\eta\|_s^2 \quad \text{e} \quad |\langle u u_x, u \rangle_s| \leq C_s \|u\|_s^3,$$

e a desigualdade de Cauchy-Schwarz junto com a proposição 2.1.14 e o teorema 2.1.15 garantem que

$$|\langle \eta u_x, \eta \rangle_s| \leq C_s \|u\|_{s+1} \|\eta\|_s^2,$$

assim, observando que $-\epsilon \|\eta_x\|_s^2 \leq 0$, segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\eta\|_s^2 + \|u\|_s^2 + C_3(h) \|u\|_{s+1}^2 \right) &\leq \alpha C_s \left(\|u\|_s \|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s+1} \|\eta\|_s^2 + \|u\|_s^3 \right) \\ &\leq \alpha C_s \|u\|_{s+1} \left(2 \|\eta\|_s^2 + \|u\|_s^2 \right). \end{aligned}$$

Denotando por

$$F = \|\eta\|_s^2 + \|u\|_s^2 + C_3(h) \|u\|_{s+1}^2 > 0,$$

tem-se que $F > 0$ se (η, u) não é a solução trivial, e é possível escrever

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} F(t) \leq 2\alpha C_s \|u(t)\|_{s+1} \left(\|\eta(t)\|_s^2 + \|u(t)\|_s^2 + C_3(h) \|u(t)\|_{s+1}^2 \right).$$

Como $\|u\|_{s+1} \leq \left(\frac{F}{C_3(h)} \right)^{\frac{1}{2}}$, segue-se que

$$\frac{d}{dt} F(t) \leq \frac{4\alpha C_s}{\sqrt{C_3(h)}} F(t)^{\frac{3}{2}},$$

que é uma inequação diferencial ordinária.

Denotando por

$$d = \frac{4\alpha C_s}{\sqrt{C_3(h)}}$$

a constante e por $\rho(t)$ a função que satisfaz a EDO obtem-se, para $(\eta, u) \neq (0, 0)$, que

$$\frac{F'(t)}{F(t)^{\frac{3}{2}}} \leq d = \frac{\rho'(t)}{\rho(t)^{\frac{3}{2}}},$$

com

$$\rho(0) = F(0) = \|\phi\|_s^2 + \|\psi\|_s^2 + C_3(h) \|\psi\|_{s+1}^2.$$

Integrando de 0 a t tem-se

$$-2F(t)^{-\frac{1}{2}} + 2F(0)^{-\frac{1}{2}} \leq -2\rho(t)^{-\frac{1}{2}} + 2\rho(0)^{-\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$F(t) \leq \rho(t). \quad (4.48)$$

Por outro lado, resolvendo a EDO, obtem-se a expressão de $\rho(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\rho'(t)}{\rho(t)^{\frac{3}{2}}} &= d, \quad \rho(0) = F(0), \\ -2\rho(t)^{-\frac{1}{2}} + 2\rho(0)^{-\frac{1}{2}} &= d \cdot t \\ \rho(t)^{-\frac{1}{2}} &= \rho(0)^{-\frac{1}{2}} - \frac{d}{2}t \\ \rho(t) &= \frac{1}{\left(F(0)^{-\frac{1}{2}} - \frac{d}{2}t\right)^2} \\ \rho(t) &= \frac{F(0)}{\left(1 - \frac{d}{2}tF(0)^{\frac{1}{2}}\right)^2}, \end{aligned}$$

onde, lembrando $d = \frac{4\alpha C_s}{\sqrt{C_3(h)}}$.

A função $\rho(t)$ dada pela expressão acima é contínua e está definida no intervalo $[0, T_s]$, com $T_s < \frac{2}{dF(0)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{d\rho(0)^{\frac{1}{2}}}$.

Portanto, segue-se de (4.48) que $F(t)$ é limitada em $[0, T_s]$ por $\rho(t)$:

$$\|\eta_\epsilon(t)\|_s^2 + \|u_\epsilon(t)\|_s^2 + C_3(h) \|u\|_{s+1}^2 \leq \rho(t).$$

Consequentemente tem-se a limitação das quantidades

$$\|\eta_\epsilon(t)\|_s^2 \leq \|u_\epsilon(t)\|_{s+1}^2,$$

garantindo que $(\eta_\epsilon(t), u_\epsilon(t)) \in H^s \times H^{s+1}$, $\forall t \in [0, T_s]$, $\forall \epsilon > 0$. ■

Com o intervalo de definição da solução fixado pelo resultado anterior, finalmente segue-se o teorema que garante a existência e unicidade de solução local para o problema de Cauchy não linear sem regularização:

Teorema 4.3.14. *Sejam $s > \frac{3}{2}$ e $(\phi, \psi) \in H^{s+1} \times H^{s+1}$ funções a valores reais. Então existe $T_s = T(s, \|\phi\|_{s+1}, \|\psi\|_{s+1}) > 0$ tal que o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C([0, T_s], H^s \times H^{s+1}) \\ \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0, \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = b\mathcal{T}[u_{xt}] + a u_{xxt}, \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \in H^{s+1} \times H^{s+1}, \end{cases} \quad (4.49)$$

possui uma única solução local. Além disso,

$$\forall t \in [0, T_s], \quad (\eta_t(t), u_t(t)) \in H^{s-2} \times H^{s-1}.$$

Demonstração: A demonstração está dividida em 3 passos:

- 1º) Obter (η, u) como um limite na topologia de $H^{s-1} \times H^s$.
- 2º) Demonstrar unicidade.
- 3º) Finalizar a demonstração da existência.

1º) Sejam $(\eta_{\epsilon_1}, u_{\epsilon_1})$ e $(\eta_{\epsilon_2}, u_{\epsilon_2})$ as soluções dadas pelo teorema 4.3.5 nos casos $\epsilon = \epsilon_1$ e $\epsilon = \epsilon_2$, respectivamente. Subtraindo as respectivas equações dos sistemas satisfeitos por essas soluções, obtem-se

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\eta_{\epsilon_1} - \eta_{\epsilon_2}) = (u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2})_x - \alpha(\eta_{\epsilon_1}u_{\epsilon_1} - \eta_{\epsilon_2}u_{\epsilon_2})_x + \epsilon_1\eta_{\epsilon_1}u_{\epsilon_1} - \epsilon_2\eta_{\epsilon_2}u_{\epsilon_2}, \\ \frac{d}{dt}(u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2}) = (\eta_{\epsilon_1} - \eta_{\epsilon_2})_x - \alpha(u_{\epsilon_1}u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2}u_{\epsilon_2}) + b\mathcal{T}[(u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2})_{xt}] + a(u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2})_{xxt}. \end{cases}$$

Definindo

$$v = \eta_{\epsilon_1} - \eta_{\epsilon_2} \quad \text{e} \quad w = u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2}$$

é possível escrever

$$\epsilon_1\eta_{\epsilon_1}u_{\epsilon_1} - \epsilon_2\eta_{\epsilon_2}u_{\epsilon_2} = \epsilon_1v_{xx} + (\epsilon_1 - \epsilon_2)\eta_{\epsilon_2}u_{\epsilon_2}$$

e os termos não lineares como

$$\eta_{\epsilon_1} u_{\epsilon_1} - \eta_{\epsilon_2} u_{\epsilon_2} = \eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2},$$

$$u_{\epsilon_1} u_{\epsilon_1 x} - u_{\epsilon_2} u_{\epsilon_2 x} = u_{\epsilon_1} w_x + w u_{\epsilon_2 x},$$

donde as equações ficam

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v = w_x - \alpha (\eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2})_x + \epsilon_1 v_{xx} + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \eta_{\epsilon_2 xx}, \\ \frac{d}{dt} w = v_x - \alpha (u_{\epsilon_1} w_x + w u_{\epsilon_2 x}) + b\mathcal{T}[w_{xt}] + a w_{xxt}. \end{cases}$$

Fazendo o produto interno em H^{s-1} da 1ª equação por v e da 2ª equação por w obtem-se

$$\left\langle v, \frac{d}{dt} v \right\rangle_{s-1} = \langle v, w_x \rangle_{s-1} - \alpha \langle v, (\eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2})_x \rangle_{s-1} + \epsilon_1 \langle v, v_{xx} \rangle_{s-1} + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \langle v, \eta_{\epsilon_2 xx} \rangle_{s-1}$$

e

$$\left\langle w, \frac{d}{dt} w \right\rangle_{s-1} = \langle w, v_x \rangle_{s-1} - \alpha \langle w, (u_{\epsilon_1} w_x + w u_{\epsilon_2 x}) \rangle_{s-1} + \langle w, b\mathcal{T}[w_{xt}] + a w_{xxt} \rangle_{s-1}.$$

A partir do lema 4.2.2 e das observação 4.3.12 e 4.3.13 segue-se que

$$\langle w, b\mathcal{T}[w_{xt}] + a w_{xxt} \rangle_{s-1} = \langle b\mathcal{T}[w_x] + a w_{xx}, w_t \rangle_{s-1} \leq -\frac{C_3(h)}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_s^2,$$

e ainda pela observação 4.3.12 tem-se que

$$\langle v, v_{xx} \rangle_{s-1} = -\|v_x\|_{s-1}^2, \quad \langle v, \eta_{\epsilon_2 xx} \rangle_{s-1} = -\langle v_x, \eta_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1}$$

e

$$\langle v, (\eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2})_x \rangle_{s-1} = -\langle v_x, \eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2} \rangle_{s-1}$$

pode-se escrever

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{s-1}^2 = \langle v, w_x \rangle_{s-1} + \alpha \langle v_x, \eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2} \rangle_{s-1} - \epsilon_1 \|v_x\|_{s-1}^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \langle v_x, \eta_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1}, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|w\|_{s-1}^2 + C_3(h) \|w\|_s^2 \right) \leq \langle w, v_x \rangle_{s-1} - \alpha \langle w, u_{\epsilon_1} w_x + w u_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1}. \end{cases}$$

Somando ambas as equações tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|v\|_{s-1}^2 + \|w\|_{s-1}^2 + C_3(h) \|w\|_s^2 \right) &\leq \langle v, w_x \rangle_{s-1} + \langle w, v_x \rangle_{s-1} - \epsilon_1 \|v_x\|_{s-1}^2 \\ &+ (\epsilon_2 - \epsilon_1) \langle v_x, \eta_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1} - \alpha \left(-\langle v_x, \eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2} \rangle_{s-1} + \langle w, u_{\epsilon_1} w_x + w u_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1} \right), \end{aligned}$$

e pela observação 4.3.12,

$$\langle v, w_x \rangle_{s-1} + \langle w, v_x \rangle_{s-1} = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|v\|_{s-1}^2 + \|w\|_{s-1}^2 + C_3(h) \|w\|_s^2 \right) &\leq -\epsilon_1 \|v_x\|_{s-1}^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \langle v_x, \eta_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1} \\ &- \alpha \left(-\langle v_x, \eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2} \rangle_{s-1} + \langle w, u_{\epsilon_1} w_x + w u_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1} \right). \quad (4.50) \end{aligned}$$

Para aplicar o lema de Gronwall (lema 2.4.4) à função

$$X(t) = \|v\|_{s-1}^2 + \|w\|_{s-1}^2 + C_3(h) \|w\|_s^2,$$

é necessário estabelecer uma desigualdade da forma

$$\frac{d}{dt} X(t) \leq a + b X(t).$$

Como $-\epsilon_1 \|v_x\|_{s-1}^2 \leq 0$, usando a nova notação tem-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} X(t) \leq (\epsilon_2 - \epsilon_1) \langle v_x, \eta_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1} - \alpha \left(-\langle v_x, \eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2} \rangle_{s-1} + \langle w, u_{\epsilon_1} w_x + w u_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1} \right),$$

e da desigualdade triangular segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} X(t) &\leq |\epsilon_2 - \epsilon_1| |\langle v_x, \eta_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1}| \\ &+ \alpha \left(|\langle v_x, \eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2} \rangle_{s-1}| + |\langle w, u_{\epsilon_1} w_x + w u_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1}| \right). \quad (4.51) \end{aligned}$$

Observação 4.3.15. Do teorema 4.3.11 vale, para $i = 1, 2$,

$$\|u_{\epsilon_i}\|_s^2 \leq \rho(t), \quad \|\eta_{\epsilon_i}\|_s^2 \leq \rho(t), \quad \|v\|_s^2 \leq 4\rho(t) \quad \text{e} \quad \|w\|_s^2 \leq 4\rho(t).$$

◇

Assim, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a proposição 2.1.14 e a

observação acima a primeira parcela do lado direito fica

$$|\epsilon_2 - \epsilon_1| |\langle v_x, \eta_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1}| \leq |\epsilon_2 - \epsilon_1| \|v\|_s \|\eta_{\epsilon_2}\|_s \leq 2 |\epsilon_2 - \epsilon_1| \rho(t). \quad (4.52)$$

Para estimar as outras parcelas será necessário um pouco mais de trabalho:

$$\begin{aligned} |\langle w, u_{\epsilon_1} w_x + w u_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1}| &= |\langle w, u_{\epsilon_1} w_x + u_{\epsilon_1 x} w - u_{\epsilon_1 x} w + w u_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1}| \\ &= |\langle w, (u_{\epsilon_1} w)_x - w_x w \rangle_{s-1}| \\ &= |-\langle w_x, u_{\epsilon_1} w \rangle_{s-1} - \langle w, w_x w \rangle_{s-1}| \\ &\leq |\langle w_x, u_{\epsilon_1} w \rangle_{s-1}| + |\langle w, w_x w \rangle_{s-1}|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle w_x, u_{\epsilon_1} w \rangle_{s-1}| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-1} \widehat{w_x}(k) \overline{\widehat{u_{\epsilon_1} w}(k)} dk \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-1} ik \widehat{w}(k) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u_{\epsilon_1}}(\xi) \widehat{w}(k-\xi) d\xi} dk \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} ik \overline{\widehat{u_{\epsilon_1}}(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-1} \widehat{w}(k) \overline{\widehat{w}(k-\xi)} dk d\xi \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} -\overline{\widehat{u_{\epsilon_1 x}}(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{\frac{s-1}{2}} \widehat{w}(k) (1+k^2)^{\frac{s-1}{2}} \overline{\widehat{w}(k-\xi)} dk d\xi \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u_{\epsilon_1 x}}(\xi)| \int_{-\infty}^{\infty} \left| (1+k^2)^{\frac{s-1}{2}} \widehat{w}(k) (1+k^2)^{\frac{s-1}{2}} \overline{\widehat{w}(k-\xi)} \right| dk d\xi \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u_{\epsilon_1 x}}(\xi)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-1} |\widehat{w}(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-1} |\widehat{w}(k-\xi)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u_{\epsilon_1 x}}(\xi)| \|w\|_{s-1} \|f\|_{s-1} d\xi, \quad \text{onde } \widehat{w}(k-\xi) = \widehat{f}(k), \text{ com } f(x) = e^{i\xi x} w(x), \\ &= \|\widehat{u_{\epsilon_1 x}}\|_{L^1} \|w\|_{s-1}^2, \quad \text{pois } \|f\|_{s-1} = \|w\|_{s-1}. \end{aligned}$$

Portanto, a partir da desigualdade acima, usando o lema 2.1.17 e a proposição 2.1.14 tem-se

$$|\langle w_x, u_{\epsilon_1} w \rangle_{s-1}| \leq \|\widehat{u_{\epsilon_1 x}}\|_{L^1} \|w\|_{s-1}^2 \leq c \|u_{\epsilon_1 x}\|_{s-1} \|w\|_{s-1}^2 \leq c \|u_{\epsilon_1}\|_s \|w\|_{s-1}^2. \quad (4.53)$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, o teorema 2.1.15 e a proposição 2.1.14 segue-se que

$$|\langle w, w w_x \rangle_{s-1}| \leq \|w\|_{s-1} \|w w_x\|_{s-1} \leq C_s \|w\|_{s-1} \|w\|_{s-1} \|w_x\|_{s-1} \leq C_s \|w\|_{s-1}^2 \|w\|_s. \quad (4.54)$$

Concluindo assim, de (4.53) e (4.54), que

$$|\langle w, u_{\epsilon_1} w_x + w u_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1}| \leq (c \|u_{\epsilon_1}\|_s + C_s \|w\|_s) \|w\|_{s-1}^2.$$

Aplicando a observação 4.3.15 obtem-se

$$|\langle w, u_{\epsilon_1} w_x + w u_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1}| \leq (c + 2C_s) \sqrt{\rho(t)} \|w\|_{s-1}^2,$$

e portanto é possível escrever

$$\begin{aligned} |\langle w, u_{\epsilon_1} w_x + w u_{\epsilon_2 x} \rangle_{s-1}| &\leq (c + 2C_s) \sqrt{\rho(t)} \left(\|v\|_{s-1}^2 + \|w\|_{s-1}^2 + C_3(h) \|w\|_s^2 \right) \\ &= (c + 2C_s) \sqrt{\rho(t)} X(t). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Para a parcela do meio, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e duas contas análogas à (4.53) garantem que

$$\begin{aligned} |\langle v_x, \eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2} \rangle_{s-1}| &\leq |\langle v_x, \eta_{\epsilon_1} w \rangle_{s-1}| + |\langle v_x, u_{\epsilon_2} v \rangle_{s-1}| \\ &\leq c \left(\|\eta_{\epsilon_1}\|_s \|v\|_{s-1} \|w\|_{s-1} + \|u_{\epsilon_2}\|_s \|v\|_{s-1}^2 \right). \end{aligned}$$

Observação 4.3.16.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\|v\|_{s-1} - \|w\|_{s-1})^2 = \|v\|_{s-1}^2 - 2\|v\|_{s-1}\|w\|_{s-1} + \|w\|_{s-1}^2 \\ &\Rightarrow \|v\|_{s-1}^2 + \|w\|_{s-1}^2 \geq 2\|v\|_{s-1}\|w\|_{s-1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|v\|_{s-1}\|w\|_{s-1} \leq \frac{1}{2} (\|v\|_{s-1}^2 + \|w\|_{s-1}^2).$$

◇

Assim,

$$\begin{aligned} |\langle v_x, \eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2} \rangle_{s-1}| &\leq c \left(\|\eta_{\epsilon_1}\|_s \frac{1}{2} (\|v\|_{s-1}^2 + \|w\|_{s-1}^2) + \|u_{\epsilon_2}\|_s \|v\|_{s-1}^2 \right) \\ &= \frac{c}{2} \|\eta_{\epsilon_1}\|_s (\|v\|_{s-1}^2 + \|w\|_{s-1}^2) + c \|u_{\epsilon_2}\|_s \|v\|_{s-1}^2. \end{aligned}$$

Somando alguns termos positivos tem-se

$$\begin{aligned}
|\langle v_x, \eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2} \rangle_{s-1}| &\leq \frac{c}{2} \|\eta_{\epsilon_1}\|_s (\|v\|_{s-1}^2 + \|w\|_{s-1}^2) + c \|u_{\epsilon_2}\|_s \|v\|_{s-1}^2 \\
&\quad + \frac{c}{2} \|\eta_{\epsilon_1}\|_s C_3(h) \|w\|_s^2 + c \|u_{\epsilon_2}\|_s (\|w\|_{s-1}^2 + C_3(h) \|w\|_s^2) \\
&= \frac{c}{2} \|\eta_{\epsilon_1}\|_s (\|v\|_{s-1}^2 + \|w\|_{s-1}^2 + C_3(h) \|w\|_s^2) \\
&\quad + c \|u_{\epsilon_2}\|_s (\|v\|_{s-1}^2 + \|w\|_{s-1}^2 + C_3(h) \|w\|_s^2) . \\
&= \left(\frac{c}{2} \|\eta_{\epsilon_1}\|_s + c \|u_{\epsilon_2}\|_s \right) X(t).
\end{aligned}$$

Assim, aplicando a observação 4.3.15 obtem-se

$$|\langle v_x, \eta_{\epsilon_1} w + v u_{\epsilon_2} \rangle_{s-1}| \leq \frac{3}{2} c \sqrt{\rho(t)} X(t). \quad (4.56)$$

Finalmente, aplicando as estimativas (4.52), (4.55) e (4.56) à inequação (4.51) segue-se que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} X(t) \leq 2 |\epsilon_2 - \epsilon_1| \rho(t) + \alpha \left(\frac{5}{2} c + 2C_s \right) \sqrt{\rho(t)} X(t).$$

Sendo ρ contínua (teorema 4.3.11), é limitada no compacto $[0, T_s]$, donde existe

$$M = \sup_{[0, T_s]} \{\rho(t)\}$$

e portanto

$$\frac{d}{dt} X(t) \leq 4M |\epsilon_2 - \epsilon_1| + 2\alpha \sqrt{M} \left(\frac{5}{2} c + 2C_s \right) X(t).$$

Denotando por $B = 2\alpha \sqrt{M} \left(\frac{5}{2} c + 2C_s \right)$, a desigualdade fica

$$\frac{d}{dt} X(t) \leq 4M |\epsilon_2 - \epsilon_1| + B X(t), \quad (4.57)$$

de modo que $X(t)$ satisfaz as hipóteses da versão diferencial do Lema de Gronwall, e aplicando-o obtem-se

$$\begin{aligned}
X(t) &\leq X(0) e^{Bt} + 4M |\epsilon_2 - \epsilon_1| \int_0^t e^{B(t-\tau)} d\tau \\
&= X(0) e^{Bt} + 4M |\epsilon_2 - \epsilon_1| \left(\frac{e^{Bt} - 1}{B} \right).
\end{aligned}$$

Como

$$v(0) = \eta_{\epsilon_1}(0) - \eta_{\epsilon_2}(0) = \phi - \phi = 0 \quad \text{e} \quad w(0) = u_{\epsilon_1}(0) - u_{\epsilon_2}(0) = \psi - \psi = 0,$$

segue-se que $X(0) = 0$, e sendo $B \geq 0$,

$$X(t) \leq 4M |\epsilon_2 - \epsilon_1| \left(\frac{e^{BT_s} - 1}{B} \right), \quad \forall t \in [0, T_s].$$

Como todas as parcelas de $X(t)$ são positivas, essa limitação vale para cada uma delas. Denotando $K = 4M \left(\frac{e^{BT_s} - 1}{B} \right)$ tem-se em particular que

$$\|\eta_{\epsilon_1} - \eta_{\epsilon_2}\|_{s-1}^2 \leq K |\epsilon_2 - \epsilon_1| \quad \text{e} \quad \|u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2}\|_s^2 \leq \frac{K}{C_3(h)} |\epsilon_2 - \epsilon_1|.$$

Portanto, para $\delta = \frac{\varepsilon^2}{2K \left(1 + \frac{1}{C_3(h)}\right)}$ e $|\epsilon_1|, |\epsilon_2| < \delta$,

$$\begin{aligned} \|(\eta_{\epsilon_1}, u_{\epsilon_1}) - (\eta_{\epsilon_2}, u_{\epsilon_2})\|_{s-1,s} &= \sqrt{\|\eta_{\epsilon_1} - \eta_{\epsilon_2}\|_{s-1}^2 + \|u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2}\|_s^2} \\ &< \sqrt{2K\delta \left(1 + \frac{1}{C_3(h)}\right)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto a sequência é de Cauchy e segue-se que o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\eta_\epsilon, u_\epsilon) = (\eta_0, u_0)$$

existe em $H^{s-1} \times H^s$ uniformemente sobre $[0, T_s]$.

Em particular, segue-se da uniformidade da convergência e da continuidade e limitação das $(\eta_\epsilon, u_\epsilon)$, $\forall \epsilon > 0$, que (η_0, u_0) é contínua e limitada em $H^{s-1} \times H^s$.

2º) Antes de mostrar que $(\eta_0, u_0) \in H^s \times H^{s+1}$, a unicidade será garantida.

Sejam $(\eta_0, u_0), (\eta'_0, u'_0) \in C([0, T_s], H^{s-1} \times H^s)$ duas soluções do problema de Cauchy (4.49). Denotando $(v_0, w_0) = (\eta_0 - \eta'_0, u_0 - u'_0)$, um processo análogo ao feito para obter a desigualdade (4.57), com $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 0$, garante que

$$\frac{d}{dx} X(t) \leq BX(t),$$

onde $X(t) = \|v_0\|_{s-1}^2 + \|w_0\|_{s-1}^2 + C_3(h) \|w_0\|_s^2$ e $B = 2\alpha \sqrt{M} \left(\frac{5}{2}c + 2C_s\right)$.

Assim, segue-se da forma diferencial da desigualdade de Gronwall que $X(t) \leq X(0)e^{Bt}$, e como $X(0) = 0$, necessariamente $X(t) \leq 0$. Em particular,

$$\|v_0\|_{s-1} = 0 \quad \text{e} \quad \|w_0\|_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_0 = \eta'_0 \quad \text{e} \quad u_0 = u'_0 \quad \text{q.t.p. em } [0, T_s].$$

3º) De acordo com o argumento apresentado por Iório em [24] (teo.3.5) e [23] (teo.2.1), $(\eta_\epsilon, u_\epsilon)$ converge fracamente para (η_0, u_0) em $H^s \times H^{s+1}$, uniformemente sobre $[0, T_s]$. Portanto $(\eta_0, u_0) : [0, T_s] \rightarrow H^s \times H^{s+1}$ é fracamente contínua e limitada pela função $\rho(t)^{\frac{1}{2}}$ definida no teorema 4.3.11.

Consequentemente,

$$F_\epsilon(\eta_\epsilon, u_\epsilon) = (u_{\epsilon x} - \alpha(\eta_\epsilon u_\epsilon)_x + \epsilon \eta_{\epsilon xx}, \eta_{\epsilon x} - \alpha u_\epsilon u_{\epsilon x} + b\mathcal{T}[u_{\epsilon xt}] + a u_{\epsilon xxt})$$

converge fracamente para $F_0(\eta_0, u_0)$ em $H^{s-2} \times H^{s-1}$ uniformemente com respeito a $t \in [0, T_s]$.

Combinando essas observações com a fórmula

$$(\eta_\epsilon(t) - \eta_\epsilon(\tau), u_\epsilon(t) - u_\epsilon(\tau)) = \int_\tau^t F_\epsilon(\eta_\epsilon, u_\epsilon)(t') dt'$$

conclui-se que

$$(\eta_0(t) - \eta_0(\tau), u_0(t) - u_0(\tau)) = \int_\tau^t F_0(\eta_0, u_0)(t') dt'.$$

Desde que $t \in [0, T_s] \rightarrow F_0(\eta_0, u_0)(t)$ é fracamente contínua, $(\eta_0, u_0) : [0, T_s] \rightarrow H^{s-2} \times H^{s-1}$ é absolutamente contínua e satisfaz o sistema (4.49) q.t.p. em $[0, T_s]$.

Para finalizar, falta demonstrar a continuidade da solução. Para isso, usar-se-á uma norma equivalente à norma usual em $H^s \times H^{s+1}$, definida no lema que se segue:

Lema 4.3.17. *A norma definida por*

$$|||(\eta, u)|||_{s,s+1} = \sqrt{\|\eta\|_s^2 + \|u\|_s^2 + C_3(h) \|u\|_{s+1}^2}$$

é equivalente à norma usual de $H^s \times H^{s+1}$, a saber

$$\|(\eta, u)\|_{s,s+1} = \sqrt{\|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s+1}^2}.$$

Demonstração: De fato, por um lado

$$\begin{aligned}\sqrt{\|\eta\|_s^2 + \|u\|_s^2 + C_3(h) \|u\|_{s+1}^2} &\leq \sqrt{\|\eta\|_s^2 + (1 + C_3(h)) \|u\|_{s+1}^2} \\ &\leq \sqrt{1 + C_3(h)} \sqrt{\|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s+1}^2},\end{aligned}$$

e por outro

$$\begin{aligned}\sqrt{\|\eta\|_s^2 + \|u\|_s^2 + C_3(h) \|u\|_{s+1}^2} &\geq \sqrt{\|\eta\|_s^2 + C_3(h) \|u\|_{s+1}^2} \\ &\geq \sqrt{\min\{1, C_3(h)\}} \sqrt{\|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s+1}^2}.\end{aligned}$$

■

Conforme detalhado em [22] (p. 309), a partir da convergência fraca segue-se que $|||(\eta_0, u_0)(t)|||_{s,s+1} \leq \rho(t)^{\frac{1}{2}}$, e daí ([22], p. 311) que

$$|||(\phi, \psi)|||_{s,s+1} \leq \limsup_{t \rightarrow 0} |||(\eta_0, u_0)(t)|||_{s,s+1} \leq \rho(0)^{\frac{1}{2}} = |||(\phi, \psi)|||_{s,s+1}.$$

Portanto a continuidade em $t = 0$ é uma consequência da continuidade fraca. Se $\tau \in (0, T_s)$ a continuidade à direita é obtida a partir da continuidade no zero e da unicidade ([22], p. 312). A continuidade à esquerda segue-se da invariância do sistema (4.49) sob a mudança de variáveis $(t, x) \mapsto (\tau - t, -x)$, $\forall \tau \in (0, T_s]$.

■

Capítulo 5

Conclusões e trabalhos futuros

Considerando tudo que foi exposto neste trabalho, conclui-se que o objetivo principal do trabalho, que consiste em obter resultados originais associados à boa colocação do sistema de tipo Boussinesq (1.4), a saber

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = b\mathcal{T}[u]_{xt} + au_{xxt}, \end{cases}$$

foi atingido através do teorema 4.3.14. A demonstração desse teorema exigiu muita pesquisa e por fim o sucesso foi obtido utilizando a técnica de regularização parabólica, seguindo de perto o roteiro apresentado por Iório em [24]. Além disso, tais estudos levaram à obtenção de outros resultados importantes, citados no que se segue.

O teorema 3.2.10, que garante a boa colocação global para a equação ILWR linearizada, teve sua demonstração detalhada usando duas técnicas diferentes: uma abordagem via teoria de semigrupos e outra que exhibe explicitamente a solução. O teorema 3.3.10, que garante a boa colocação local da equação ILWR, foi enunciado de maneira original e demonstrado com detalhe via teorema do ponto fixo de Banach, seguindo as ideias em [11]. Esses dois teoremas reúnem os resultados de boa colocação para a equação ILWR.

Para o sistema tem-se, além do resultado principal citado acima, o teorema 4.1.13, que garante a boa colocação global do sistema de tipo Boussinesq linearizado, foi demonstrado de duas formas diferentes, uma usando a técnica de teoria de semigrupos e outra explicitando a solução como feito em [6]. Também foi obtida a lei de conservação que aparece no teorema 4.3.4, e sua versão para o sistema

com regularização parabólica no teorema 4.3.1. Denotando por

$$\mathcal{L}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2}{2} dx + \frac{b}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x \mathcal{T}[v] dx + \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(\omega, 1),$$

com $v = \alpha u$, $\omega = 1 - \alpha \eta$ e $\sigma_0(\omega, 1) = \omega \log \omega - \omega + 1$, a lei de conservação pode ser escrita como

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(0).$$

A demonstração desses dois resultados segue os passos de uma dedução similar em [41] para o sistema de Boussinesq. Eles podem ser úteis no futuro para garantir a boa colocação global do sistema (1.4). Nesse sentido, uma continuação natural desta pesquisa é provar a continuidade com relação aos dados iniciais da solução local do sistema (1.4), bem como a propriedade de permanência da mesma, de modo a obter a boa colocação local, para em seguida partir para a boa colocação global.

Como trabalhos futuros propõe-se ainda uma abordagem numérica, na qual pretende-se adaptar implementações já existentes com a finalidade de fornecer soluções numéricas para os problemas estudados teoricamente. No espírito da computação científica, espera-se que essas soluções aproximadas forneçam validação e entendimento sobre o comportamento das soluções, especialmente no que diz respeito à sua permanência nos espaços de funções considerados, em particular, a continuidade do perfil η . Também sugere-se utilizar métodos numéricos conservativos para monitorar quantidades conservadas.

Na implementação do método de linhas utilizar-se-á uma discretização espacial do tipo diferenças finitas centrado de quarta ordem para as derivadas espaciais junto com o método de Runge-Kutta clássico de quarta ordem como integrador espacial, que já provou ser uma combinação com ampla região de estabilidade absoluta [36]. Especificamente nos modelos dispersivos, as estimativas obtidas em [6] mostraram como condições de estabilidade do tipo CFL são relaxadas graças à presença do termo dispersivo, que no caso citado foi aproximado por um método espectral derivado diretamente da expressão no domínio da frequência do operador \mathcal{T} . A escolha do domínio periódico não só facilita a transição para o método numérico espectral, mas também indica qual núcleo deve ser considerado na discretização espacial ao utilizar a Regra do Trapézio Alternada [42]. Como ilustrado em [35], a Regra do Trapézio Alternada pode produzir autovalores aproximados com simetrias espúrias, o que pode comprometer a precisão. Uma desingularização do núcleo de convolução foi a proposta feita nesse artigo para melhorar a aproximação; pretende-se seguir a mesma estratégia no futuro para comparar ambas as abordagens: a aproximação espectral de \mathcal{T} e a aproximação partindo do núcleo no domínio físico.

Bibliografia

- [1] L. Abdelouhab: *Nonlocal dispersive equations in weighted Sobolev spaces*. Differential Integral Equations, 5: 307-338, 1992.
- [2] L. Abdelouhab, J.L. Bona, M. Felland e J.-C. Saut: *Nonlocal models for nonlinear, dispersive waves*. Physica D, 40: 360-392, 1989.
- [3] M.J. Ablowitz, A.S. Fokas, J. Satsuma e H. Segur: *On the periodic intermediate long wave equation*. Journal of Physics, A, 15: 781-786, 1982.
- [4] A. A. Alazman, J. P. Albert, J. L. Bona, M. Chen e J. Wu: *Comparisons between the BBM equation and a Boussinesq system*. Advances in Differential Equations, 11: 121-166, 2006.
- [5] J.P. Albert e J. F. Toland: *On the exact solutions of the intermediate long-wave equation*. Differential Integral Equations, 7: 601-612, 1994.
- [6] D. G. Alfaro, S. P. Oliveira, A. Ruiz de Zárate e A. Nachbin: *Fully discrete stability and dispersion analysis for a linear dispersive internal wave model*. Computational and Applied Mathematics, 33: 203-221, 2014.
- [7] C. J. Amick: *Regularity and Uniqueness of Solutions to the Boussinesq System of Equations*. Journal of Differential Equations, 54: 231-247, 1984.
- [8] J.L. Bona, M. Chen e J.-C. Saut: *Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media: I. Derivation and linear theory*. Journal of Nonlinear Science, 12: 283-318, 2002.
- [9] J.L. Bona, M. Chen e J.-C. Saut: *Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media: II. The nonlinear theory*. Nonlinearity, 17: 925-352, 2004.
- [10] J.L. Bona, D. Lannes e J.-C. Saut: *Asymptotic models for internal waves*. J. Math. Pures Appl., 89: 538-566, 2008.

- [11] M. P. de Borba: *A Equação Intermediária de Ondas Longas em Espaços de Sobolev com Pesos*, Tese de Doutorado. IMPA, Rio de Janeiro: 1991.
- [12] M. P. de Borba: *The intermediate long-wave equation in weighted Sobolev space*. Matemática Contemporânea, 3: 09-20, 1992.
- [13] N. Burq e F. Planchon: *On well-posedness for the Benjamin-Ono equation*. Mathematische Annalen, 340: 497-542, 2008.
- [14] W. Choi e R. Camassa: *Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system*. Journal of Fluid Mechanics, 313: 83-103, 1996.
- [15] W. Choi e R. Camassa: *Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system*. Journal of Fluid Mechanics, 396: 01-36, 1999.
- [16] A. J. Chorin e J. E. Marsden: *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. 3ª edição. Springer Verlag, 1992.
- [17] Z. Deng e H. Ma: *Optimal error estimates of the Fourier spectral method for a class of nonlocal, nonlinear dispersive wave equations*. Applied Numerical Mathematics, 59: 988-1010, 2009.
- [18] A.M. Gomes: *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*. 2ª edição. Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro: 1999.
- [19] J.C.M. Grajales: *Existence and Numerical Approximation of Solutions of an Improved Internal Wave Model*. Mathematical Modelling and Analysis, 19: 309-333, 2014.
- [20] S. Griffiths: *Mystery of the UNDERWATER waves as tall as skyscrapers: Scientists to unravel what happens to 'internal' waves as they hit land*. Mail Online: Science & Tech, 28/01/2015. Disponível em: <<http://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-2929852/Mystery-underwater-waves-tall-SKYSRAPERS-Scientists-unravel-happens-internal-waves-hit-land.html>> Acesso em: 29/01/2015.
- [21] R. J. Iório Jr. e V. M. Iório: *Equações Diferenciais Parciais: uma introdução*. 2ª edição. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2010.
- [22] R. J. Iório Jr. e V. M. Iório: *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. 1ª edição. Cambridge University Press, Cambridge: 2001.

- [23] R. J. Íorio Jr.: KDV, BO and friends in weighted Sobolev spaces. In: Fujita, H., Ikebe, T. e Kuroda, S.T. (Ed(s)) *Functional-Analytic Methods for Partial Differential Equations*. Springer Berlin Heidelberg, 1990. p. 104-121.
- [24] R. J. Íorio Jr.: *On the Cauchy Problem for the Benjamin-Ono Equation*. Communications in Partial Differential Equations, 11(10): 1031-1081, 1986.
- [25] C. Isnard: *Introdução à Medida e Integração*. IMPA, Projeto Euclides, 2007.
- [26] R.I. Joseph: *Solitary waves in finite depth fluid*. Journal of Physics, A, 10: L225-L227, 1977.
- [27] T. Kato: *On the Cauchy Problem for the (Generalized) Korteweg-de Vries Equation*. Studies in Applied Mathematics, Advances in Mathematics Supplementary Studies, 8: 93-128, 1983.
- [28] E. Kreyszig: *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library Edition Published 1989, reprint: 2007.
- [29] Kodama, Y, Satusuma, J. e Ablowitz, M.J.: *Nonlinear Intermediate Long-Wave Equation: Analysis and Method of Solution*. Physical Review Letters, 46: 687-690, 1981.
- [30] T. Kubota, D. Ko e L. Dobbs: *Propagation of weakly non linear internal waves in a stratified fluid of finite depth*. AIAA J. Hydrodynamics, 12: 157-165, 1978.
- [31] H. Lamb: *Hydrodynamics*. Dover: 1932.
- [32] E. L. Lima: *Curso de análise, Volume 1*. 12^a edição. IMPA, Rio de Janeiro: 2008.
- [33] E. L. Lima: *Curso de análise, Volume 2*. 11^a edição. IMPA, Rio de Janeiro: 2009.
- [34] F. Linares e G. Ponce: *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. 1^a edição. Springer, New York: 2009.
- [35] S. P. Oliveira, A. Ruiz de Zárate, A. C. da Rocha e D. G. Alfaro: *A note on the alternate trapezoidal quadrature method for Fredholm integral eigenvalue problems*. Numer. Algor., 62(2): 601-614, 2013.
- [36] A. Ruiz de Zárate: *A Reduced Model for Internal Waves Interacting with Submarine Structures at Intermediate Depth, Tese de Doutorado*. IMPA, Rio de Janeiro: 2007.

- [37] A. Ruiz de Zárate e A. Nachbin: *A Reduced Model for Internal Waves Interacting with Submarine Structures at Intermediate Depth*. Commun. Math. Sci., 6: 385-396, 2008.
- [38] A. Ruiz de Zárate, D.G. Alfaro, A. Nachbin e W. Choi: *A Higher-Order Internal Wave Model Accounting for Large Bathymetric Variations*. Studies in Applied Mathematics, 122: 275-294, 2009.
- [39] J. Satsuma, M.J. Ablowitz e Y. Kodama: *On an internal wave equation describing a stratified fluid with finite depth*. Physics Letters A, 73: 283-286, 1979.
- [40] J.-C. Saut: *Asymptotic Models for Surface and Internal Waves*. 29º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro: 2013.
- [41] M.E. Schonbek: *Existence of Solutions for the Boussinesq System of Equations*. Journal of Differential Equations, 42: 325-352, 1981.
- [42] A. Sidi e M. Israeli: *Quadrature methods for periodic singular and weakly singular Fredholm integral equations*. J. Sci. Comput., 3(2): 201-231, 1988.
- [43] T. Tao: *Nonlinear Dispersive Equations Local and Global Analysis* Regional conference series in mathematics, no. 106. AMS, 2006.
- [44] G. B. Whitham: *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons, 1999.
- [45] E. W. Weisstein: *Elliptic Integral of the First Kind*. MathWorld: A Wolfram Web Resource. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/EllipticIntegraloftheFirstKind.htm>> Acesso em:31/01/2015.
- [46] E. W. Weisstein: *Complete Elliptic Integral of the First Kind*. MathWorld: A Wolfram Web Resource. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/CompleteEllipticIntegraloftheFirstKind.html>> Acesso em:31/01/2015.
- [47] L. Xu: *Intermediate long wave systems for internal waves*. Nonlinearity, 25: 597-640, 2012.